复变函数技术

现代连续统物理丛书 12

〔美〕A.C.爱林根 主编

程 沅 生 译



江苏科学技术出版社

现代连续统物理丛书

第十二分册

复变函数技术

〔美〕F·艾多温　著
程　沅　生　译
陆　毅　中　校

江苏科学技术出版社

CONTINUUM PHYSICS

•

F. Erdogan

Complex Function Technique

ACADEMIC PRESS, 1975

现代连续统物理丛书

第十二分册

复变函数技术

〔美〕F·艾多温 著

程沅生 译 陆毅中 校

出版：江苏科学技术出版社

发行：江 苏 省 新华书店

印刷：淮 阴 新 华 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 4 字数 79,000

1982 年 7 月第 1 版 1982 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—4,600 册

书号 13196·099 定价 0.45 元

责任编辑 王永发

《现代连续统物理丛书》译序

中国力学学会理性力学与力学中数学方法专业组，于一九七九年八月一日至十九日在兰州大学举办了第一次理性力学讲学讨论会。会上，来自全国二十七所高等院校和中国科学院力学研究所、计算中心的全体代表共同商定组织翻译由美国普林斯登大学 A. C. Eringen 教授主编的《连续统物理》(卷1—卷 4)一书，共分十七分册，争取于一九八〇年至一九八二年陆续出版，以利于推进我国理性力学的发展。今得江苏科学技术出版社的大力支持，本《丛书》终于和读者见面了。原主编 A. C. Eringen 教授亲自撰就中文版序言，并为本《丛书》在我国翻译出版给予了热情的支持。

理性力学是在近代生产的大量经验事实的基础上，建立起较完备的公理体系，运用物质运动所必须遵循的基本定律，以严密的逻辑思维和推理方法去研究连续介质(简称连续统)的物质运动和变形的一般性规律的力学。它只有二十多年的历史。当然，关于用理性的方法对连续介质运动普遍规律的研究，最早应溯及贝努里、欧拉、柯西等著名的数学家和力学家；理性力学的学科名词也始见于该时。但从十九世纪末至二十世纪中，力学界主要着眼于传统力学在生产实际中的应用，而一度忽视了对连续介质力学的基础理论的探讨。人类工业生产的发展，引用了许多新材料，对原有材料的使用也大大地扩大了范围。只依靠象弹性材料这样简单材料的力学——弹性力学或一般流体力学，显然不能满足人们的生产要求了。

这种情况，从一九四五年起开始发生了变化，M. Reiner 和 R. S. Rivlin 等人对橡皮物质大变形的研究，接着一九四八年J. D. Oldroyd对流变物质状态方程的研究，逐步为形成近代理性力学创造了条件。C. A. Truesdell, W. Noll 和 B. D. Coleman 等人从一九五八年后提出了更加完善的关于构造物质运动本构方程的公理体系，建立了各类物质本构方程的严密的数学模型，使理性力学形成了一个比较完善的理论体系，澄清了应用力学中关于应力、应变、应力率、应变率等含糊不清的基本概念。在此基础上，对物质进行了分类，确立了简单物质的谱系、并对谱系中各种物质（弹性物质、粘弹性物质、超弹性物质、次弹性物质）的本构方程进行了广泛深入的研究，用逆法或半逆法找到了在有限变形条件下不少问题的精确解。这就把二十世纪初期蓬勃发展起来的应用力学的研究范围大大地推进了一步，即把通常线性物性方程如 Hooke 弹性体，Maxwell, Voigt 和 Boltzmann 线性粘弹性体，Newton 粘性流体的研究范畴，推进到非线性物性方程的研究范畴，而且考虑了机械变形和热、电、磁各种非线性耦合效应。与此同时，提出了各种新型物质如液晶、微极物质、微态物质、非局部物质、位错连续统的数学模型，并进行了大力的研究。在此基础上，逐步形成了前途十分广阔的新学科、新方向。这一切使我们对客观世界的认识更加深了。理性力学也研究连续统在热、电、磁等和力学的耦合现象，因此，被称为连续统物理。

理性力学与近代数学有着密切的联系，在其发展过程中，用到了近代数学中包括张量分析、微分几何、不变量理论、群论、泛涵分析、拓扑学、解析函数论等许多基础知识。目前，尤其在欧洲业已形成了用纯粹数学来研究力学理论的新学

派。因此，理性力学在其发展过程中，虽曾经历了一段曲折的道路，但经过二、三十年的奋斗，作为连续介质力学的理论基础，业已牢牢地树立了自己的地位。在国际上，它强烈地影响着传统的力学教育和力学研究，也大大地增强了力学处理现实生产问题和近代新型工业材料的能力。

A. C. Aringen 主编的《连续统物理》就包括了这一学科的几乎全部的现代成就，所以本《丛书》译名定为《现代连续统物理》。本《丛书》的译审小组成员：钱伟长（组长）、叶开沅、朱兆祥、朱照宣、汪家訸、苗天德、周焕文、张文、段祝平、戴天民。

钱伟长

一九七九年十二月八日
于清华园

中 译 本 序

当前，在所有物理学理论的构造中，共有两种基本的数学模型：一是离散体模型，另一是连续统模型。离散体模型认为，物体是由大量具有确定物理性质(如质量、电荷)、彼此又相互吸引而聚集在一起的几何点的集合所组成的。这方面最突出的例子莫过于原子模型了。虽然，对许多物质理论，牛顿力学仍然适用，但原子模型的基本定律则是由量子力学所描述的。

连续统模型则引用场的概念去描述物体的几何点，不必去区分构成该物体的一个个粒子间的差异。在物体任一点上可以确定一个密度，例如质量密度、电荷密度和能量密度，不再把它们加以量子化。此外，表面上的点具有面密度，如应力和热流。在连续统模型中运用的物理定律是各种守恒律，此外还由本构方程予以补充。

一个数学模型，不论它多么谨严，也决不能真真实实地一丝不差地表达出物质的物理学规律。外部特征长度(和/或时间)与物体内部特征长度（和/或时间）的比值决定了该物体对外界作用的反应。当外界作用的载荷给出的波长大大超过颗粒（原子）间的距离时，经典场论得到的结果和实验观测相符合。当该比值趋近1时，离散体模型便将取而代之了。但当特征长度的比值小于1时，点粒子（原子）可再度认为具有连续统的特性。这时，可把物体考虑成是由离散的连续

体的集合组成的。在这里，我们明确地看到了离散体和连续体这两种模型交织在一起的混合模型。

量子力学是在一种尺度上建立起来的。而相对性场论用的是另一种尺度，这就足以使我们相信，一切离散体的模型和连续统的模型都具有它们理论自身适用的范畴，这种适用性取决于我们所要求的精度。

人们常说，原子模型描述了“真实的世界”，其实，这种说法仍然只是一种个人的喜爱或抱有成见的观点，因为几何点没有尺度就不可能具有诸如质量、电荷这样的物理属性。相反地，对连续统模型又怎样呢？这里，几何点是用场来描述的。按此逻辑，连续统模型要比离散体模型“更加真实”。其实，这个结论也会给人以一种错觉，因为不可能有纯粹是几何点构造的物体的。

一种理论当它能说明许许多多的物理现象而同时结构简单又具有完美的感染力时才是最有生命力的。

过去的二十年，连续统场论在两个基本方面取得了重大的进展：（一）建立了经典的线性和非线性场论的数学模型，（二）把微极场论和非局部场论引导到具有内部结构的物质研究中去。在第一方面，我们有：非线性弹性理论，流体动力学，与记忆有关的弹性体、与记忆有关的流体、混合物理论以及电磁场理论。我们已毫不含糊地确立了普遍适用于这些场的基本定律，同时本构方程也有了更加坚实牢靠的基础。

研究这些基础理论产生了丰硕的成果。人们不但揭示了在这些乍看上去互不相同的物理场之间存在着基本的结构和统一的原理，而且能够更加深入和广泛地把我们的研究范畴扩大到包括复合介质（固体和流体的混和物、多孔介质）和有电磁场作用的变形介质中去。本专著第二卷和第三

卷分别讨论了由单一物质和混合物组成的基本原理和本构理论。

经典场论不包含有内在的特征长度，所以它只限于在宏观物理学的范畴内应用。随着微极场论和非局部场论的发展，我们进入了具有内部结构的物质领域。属于微极理论和非局部理论应用范畴的例子有：颗粒固体、非结晶材料、复合材料、多孔材料、各向异性流体、悬浮体、血液、液晶和磁性材料等等 诚然，数学上已有了相当多的解可以作为我们的证明，但人们还在期待着有更多的解的到来。非局部场论实际上具有一种潜在的力量，它可以解释和预言在分子和原子尺度范围内发生的物理现象。对这一点，看一看近来在波的传播、位错理论、断裂力学（例如，裂纹尖端问题）等领域内获得的结果便会深信无疑了。本专著第四卷对微极理论和非局部理论进行了讨论，第三卷讨论微磁场理论。可惜的是，在本专著出版的时候，尚无这一方面的更多解法和其他的结果，因而只能暂付阙如。

毫无疑问，一切理论随着时间的流逝，人们都会对其作出修改，同时会给出更加满意的证明。尽管如此，所有的物理学理论，倘若得以生存，还必须经受住来自实验的严峻考验。有些时候，实验期待着上升到理论的高度（例对液晶），有时，为提出一个决定性的实验却需要得到一些更新的数学解法。

在连续统场论发展的过程中，数学的许多分枝起到了重要的作用。本专著第一卷包含的数学内容就是根据编者在撰稿时的喜爱选择的。由于篇幅有限，无奈有不少重要的其他的数学分枝都不在本卷选编之列。

这四卷专著译成中文，本人感到极为荣幸。现代连续统

场论能和这样广大的中国读者见面，这在开拓其他理论领域和发展科学及技术的应用方面必将产生重大效果。我们希望，中译本的出版也将为加强中美之间的友谊作出贡献。

A. C. 爱林根

一九八〇年五月

主编者原序

在过去十年里，连续统场论的基础和有关应用都得到了一些明确而又重大的进展，变形介质的几何学和运动学都已严格地建立起来了。单一介质、材料的混合物和具有微结构的材料的平衡定律已经形成了。具有单一材料的连续介质的热力学取得了牢固的基础，而且，在建立混合物和具有化学反应的介质的热力学方面，也取得了重大的进步。我们已经有了一个包罗万象的而且严格的本构方程理论，它已成功地应用于许多特殊类型的材料，例如，非线性弹性体、非牛顿流体、记忆性材料、混合物以及电磁固体和流体等。除此而外，还认真地用不同的几何学在各种不同类型的介质中寻找过非线性静力学和非线性波动学问题的各种解。

面对着这类研究工作的爆炸性的快速发展，即使专家也很难跟上去、理解它，并把它用到各自的研究工作中去。由于这个领域的文献既广泛又分散，搜寻、阅读和理解这些文献的确存在着困难。许多在古典领域中进行研究工作的人员，都遇到了上述实际困难；不少新形成的学派，还是孤立地工作着的。

三卷本①的《连续统物理》就是为各个互不联系的专家和学者提供必要的基础来阅读连续统物理各个方面的最新文

①译注　后来又出了第四卷，主要介绍了在广义连续统的理论的研究基础上建立起来的微极场论、非局部场论和非局部微极场论。

献。这样，我们希望不同领域的研究工作者能够携起手来，共同工作，而且从其他领域发展的一些强有力的方法中，各自有所借镜。

我们一定要在非线性理论和发展得很完善的古典线性理论以及近似理论之间，建立种种桥梁。通过谨慎地选择问题和选择解法，非线性场论和线性场论在某些应用中将能带来有意义的启发。

这个规划是宏伟的。在建立过程中，常常诱使人们追求详尽。力求完备的心情是不小的。如果我们不注意克服这种意图，常常会使我们偏离基本目标，不仅不能保持头脑清醒，反而引起更多的混乱和失望。所以，我们不得不在许多重要的领域内采取简述，而在另一些领域内则力求严加选材。

在第一卷内，我们致力于讨论一些选用的数学方法。每个方法都只能有精简的分量。在连续统物理研究工作中，几乎要用到所有数学领域，哪怕只用一点点，但都有一席地。我们只选取了数学的六个领域，在连续统物理的发展中，它们都曾占有中心地位，并曾反复使用过。它们是张量分析、群论、不变量理论、泛函分析、解析函数论、随机过程。它们都纳入第一卷的第一至第四部分。不幸的是，还有许多数学领域同样地是基础，但只好割爱了。它们包括偏微分方程、积分方程、可微的和拓扑的流形等诸重要领域。

本书的第二卷，致力于单一材料连续统的非线性理论，讲述了变形的几何学和运动学，讨论了平衡定律、热力学和本构理论。第二卷第一部分是基础理论，它专门处理热弹性固体，热粘性流体，塑性力学以及与记忆有关的材料。第二卷第二第三部分涉及固体介质和流体介质的非线性静动力学诸问题的解法。为了阐明使用积分方程和解析函数论的基本数

学方法，这里也处理了线性理论和一些重要的线性混合边界值问题。近似法和数值法同样是重要的，但并未包括在本卷之内。

本书的第三卷致力于混合物、位错和电磁相互作用的连续统理论。

我必须声明：本书得到了许多作者愉快的合作，没有他们的贡献，本书的目的就无法实现。为此，我向他们致谢。我和我的同事之间的友好的讨论，耐心的修订和热忱的工作，经常给我不断的鼓励。

许多文章不仅是已知材料的重新组织，而且包括着作者们的新发现。我们诚恳希望，这些工作不仅对研究人员有帮助，而且也可以供工程和应用科学、应用数学和数学物理的研究生教学学习之用。

A. C. 爱林根

目　录

第1章　本分册的范围

本分册讲述连续统力学和连续统物理中线性边界值问题的求解方法，从广义上讲这些方法是复变函数理论的应用。在解一个给定的问题时，如何选取最有效的方法，一般地是取决于微分方程的类型、介质的几何形状和边界条件的性质。在各式各样的问题中，这三方面因素的结合使得方程的解可以表示成封闭的形式①。在这些边界值问题中下列三种类型出现得最多：

（a）在势论中称之为狄利克雷（Dirichlet）问题和诺伊曼（Neumann）问题的这样一类广泛的问题。这些问题也称为势论的第一类和第二类基本边界值问题，它们要求在给定的区域内确定一个调和函数，在区域的边界上，第一类问题的边界条件是给定函数，第二类问题则是给定函数的法向导数。

（b）这样一类边界值问题：即区域的几何形状和边界条件使得问题具有一组完全的正交特征函数系。在这样的情况下，区域通常被曲面 $x^k=a_i^k$（$i=1,2$；$k=1$ 或 $k=1,2$ 或 $k=1,2,3$）所限定，其中 x^k 是空间坐标，a_i^k 是常数。设边

---

①原注　“封闭形式的解”是指：(a) 解被表示成系统的独立变量和参数的已知显函数，(b) 解通过已知函数的收敛的定积分表示出来，(c) 解通过具有已知系数的收敛的函数项无穷级数表示出来，(d) 解通过已知函数的收敛的无穷积分表示出来。

界值问题可以表述成

$$
\begin{aligned}
&L_{2m}(u)=f(x^k), && x^k\in D \\
(1.1)\qquad & \\
&B_i(u)=g_i(x^k) && i=1,\cdots,\mathrm{m},\ x^k\in \mathrm{S}
\end{aligned}
$$

其中 L_{2m} 是一个 2m 阶的微分算子，B_i ($i=1,\cdots,\mathrm{m}$) 是（最多为）2m－1 阶的算子，f 和 g_i 是已知的函数，D 是区域，S 是 D 的边界。假如在由 $x^k=a_j^k$ 确定的部分边界曲面 S_{jk} 上齐次算子 $B_i(u)$ 没有变化，则问题称为普通边界值问题。假如在一部分光滑曲面 S_{jk} 上有 B_i 的一组算子， 而在其余的边界部分有另一组算子，则此问题称为混合边界值问题。在（b）类问题中的普通边界值问题可以用特征函数展开式方法得到封闭形式的解。假使问题具有混合边界条件，一般讲来，特征函数展开式方法将导出一组对偶级数方程，其中展开式的系数通常不能导出封闭形式的解。

（c） 定义在“无穷”区域内的一类边界值问题。 这类问题的区域几何形状和边界条件使得问题存在着或者能导出适当的积分变换。在这种情况下，假使问题是普通边界值问题，解可以通过反演积分表示成封闭形式。另一方面，假使边界条件是混合型，这种方法将导出一组对偶积分方程，其中未知函数是个积分变换式。

暂且不管二维势论中普通边界值问题的直接应用，在解混合边界值问题中复变函数理论间接地找到了它的一个最有效的应用。因为复变函数的基本理论和直接应用在本译丛的第五分册《解析函数论》中已有阐述，我们这一分册将限于讨论复变函数方法对混合边界值问题的应用。特别是由于在绝大多数问题中，混合边界值问题与复变函数理论之间的联系是通过奇异积分方程来实现的，所以本分册的大部分将用来介绍这些方程的实用解法。

第2章　定义：对偶级数方程，对偶积分方程，势，通量

为了便于理解某些基本概念的定义，我们来研究下列二维势论中的一个简单例子(图1)：试找出函数$u(x,y)$，它满足

(2.1) $$\nabla^2 u(x,y)=0,\quad 0<x<b,\quad 0<y$$

并满足边界条件

(2.2) $$\partial u/\partial x=0,\quad x=0,\ x=b$$

(2.3) $$\lim_{y\to 0^+}\mu\frac{\partial u}{\partial y}=f(x),\quad x\in L$$

(2.4) $$u=0,\quad y=0,\quad x\in L'$$

(2.5) $$u\to 0,\quad 当y\to\infty时$$

(2.6) $$L=\sum_1^m L_k,\quad L_k=(a_k,\ c_k),\quad a_k<c_k<a_{k+1}$$

$$0<(a_k,\ c_k)<b,\ k=1,\cdots,m$$

其中L'是$y=0$，$0<x<b$上L的余集。这儿的势u可以表示下列场中的任一个量，比如：温度(在热传导中)、静电势、质量浓度、速度势(在流体力学中)或位移(在平行于z轴的反平面剪切问题中)。而μ是材料常数。很明显，这是一个混合边界值问题，因为在光滑边界$y=0$，$0<x<b$的L部分上给定的是u的法向导数，而在其余的部分L'上给定的是函数u。

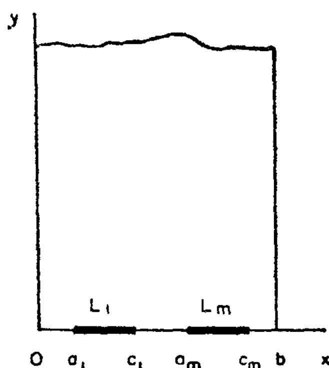


图 1　半无穷带的混合边界值问题

势的法向导数 $\partial u/\partial n$ 被称为"通量"，在这个问题里，它可以代表例如热通量、静电场①、质量扩散速率、速度或应力等物理量。它是具有分量 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 的向量 grad u 的法向分量②。显然，如果在边界的 L' 部分上 u 是已知的，比如 $u=G(s)$，s 是弧长，于是 u 在L'上的切向导数也是已知的，它为 $\partial u/\partial s=G'(s)$。在研究混合边界值问题中，由于量纲的一致，处理边界上的 $\partial u/\partial n$ 和 $\partial u/\partial s$ 要比处理 $\partial u/\partial n$ 和 u 方便得多。

现在让我们从形式上来求解由（2.1）—（2.6）式所确定

①校注　原文写静电荷是错误的

②原注　方程（2.2）—（2.6）可以表示一个无限弹性体的反平面剪切问题，这个弹性体剪切模量为 μ，在 xz 平面上它含有一列平面裂纹 $L_k(k=1,\ \cdots,\ m)$，裂纹表面受到反平面切应力 $t_{yz}(x,0)=f(x)$ 的作用。

的问题。对于方程(2.1)很容易得到满足在 $y=\infty$ 处条件即(2.5)式的解

$$(2.7)\qquad u(x,y)=\sum_{0}^{\infty}A_n e^{-\alpha_n y}\cos\alpha_n x,\qquad 0<x<b,\ 0<y$$

其中 $A_n(n=0,\ 1,\ \cdots)$ 是未知的常数，由(2.2)式得到

$$(2.8)\qquad \alpha_n=\frac{\pi n}{b}$$

将(2.7)式代入其余的边界条件(2.3)和(2.4)式，得到

$$(2.9)\qquad \lim_{y\to 0^+}\sum_{1}^{\infty}\alpha_n A_n e^{-\alpha_n y}\cos\alpha_n x=-\left(\frac{1}{\mu}\right)f(x),\ x\in L$$

$$(2.10)\qquad \sum_{0}^{\infty}A_n\cos\alpha_n x=0,\qquad x\in L'$$

在 L 的各端点 a_k、c_k，由(2.9)式确定的函数是不连续的。因此，除去端点，并暂时假定级数(2.9)是均匀收敛的，在求和号内取极限，(2.9)式和(2.10)式形式上可以表示成

$$(2.11)\qquad \sum_{1}^{\infty}A_n\alpha_n\cos\alpha_n x=-\left(\frac{1}{\mu}\right)f(x),\qquad x\in L$$

$$(2.12)\qquad \sum_{0}^{\infty}A_n\cos\alpha_n x=0,\qquad x\in L'$$

由(2.11)和(2.12)式确定的无穷方程组称为**对偶级数方程**。对于N组未知系数$A_{jn}(j=1,\cdots,N;\ n=1,2,\cdots)$，推广(2.11)式和(2.12)式，我们如下定义**一组对偶级数方程**①：

---

①原注　例如，若图1所示的带子含有 $N-1$ 行附加割线，它们位于 $y=h_l(l=2,\cdots N)$，$a_k<x<c_k$ $(k=1,\cdots m)$（即在 $x\in L$ 上），割线的表面分别有通量 $f_l'(x)(l=2,\cdots,N)$，能够很容易地证明，问题公式化后将导出一组(2.13)和(2.14)类型的对偶级数方程。

$$(2.13)\quad \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}k_{1j}^{l}(x,n)A_{jn}=f_1{}^{l}(x),\quad x\in L,\quad l=1,\cdots,N$$

$$(2.14)\quad \sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}k_{2j}^{l}(x,n)A_{jn}=f_2{}^{l}(x),\quad x\in L',\quad l=1,\cdots,N$$

其中 A_{jn} $(j=1,\cdots N;\ n=1,2,\cdots)$ 是未知的常数，核 k_{1j}^{l} 和 k_{2j}^{l} 是不相同的。我们注意，因为(2.11)和(2.12)式中的核 $\cos\alpha_n x$ 在 $0<x<b$ 内即在 $L+L'$ 上是正交的，假使 L' 或 L 为零，也就是说，假使问题是一个普通边界值问题，那么利用欧拉(Euler)公式从(2.11)式或(2.12)式便可直接确定出 A_n。

若我们设

$$A_n=\left(\frac{2}{b}\right)F(\alpha_n),\qquad \Delta\alpha_n=\alpha_n-\alpha_{n-1}=\frac{\pi}{b}$$

(2.7)式变成

$$(2.15)\qquad u(x,y)=\left(\frac{2}{\pi}\right)\sum_{0}^{\infty}F(\alpha_n)e^{-\alpha_n y}\cos\alpha_n x\Delta\alpha_n$$

$$0<x<b,\qquad y>0$$

若令 $b\to\infty$，α_n 变成一个连续变量，由(2.15)式我们得到

$$(2.16)\quad u(x,y)=\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^{\infty}F(\alpha)e^{-\alpha y}\cos\alpha x d\alpha,\qquad x>0,\quad y>0$$

上式也可以由(2.1)式利用 x 的余弦变换直接得到。对(2.9)式和(2.10)式用同样的取极限方法，我们得到

$$(2.17)\qquad \lim_{y\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^{\infty}\alpha F(\alpha)e^{-\alpha y}\cos\alpha x d\alpha$$

$$=-\left(\frac{1}{\mu}\right)f(x),\qquad x\in L$$

(2.18) $\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha = 0, \qquad x \in L'$

这儿(2.17)式和(2.18)式被定义为一对对偶积分方程。其中$F(\alpha)$是未知函数，它代替了出现在(2.9)式和(2.10)式中的常数A_n的离散集。另外，在普通边界值问题的情况下，即或者是L'或者是L等于零的情况下，很明显，由(2.17)式或(2.18)式利用反演积分可以直接得到$F(\alpha)$。

在未知函数数目大于1的情况下(例如N-1个附加“加载”割线平行于x轴的情况)，(2.17)式和(2.18)式可以被推广给出下列对偶积分方程组：

(2.19) $\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{N} k_{1j}^{l}(x,\alpha)F_j(\alpha)d\alpha = f_1{}^{l}(x), \ x \in L, l = 1, \cdots, N$

(2.20) $\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{N} k_{2j}^{l}(x,\alpha)F_j(\alpha)d\alpha = f_2{}^{l}(x), \ x \in L', l = 1, \cdots, N$

其中$F_j(j=1,\cdots,N)$是未知函数。

由(2.6)式及图1可以看出，对偶级数方程(2.11)和(2.12)，或对偶积分方程(2.17)和(2.18)被表示在$(2m+1)$个不同的区间内。于是，根据习惯用语[例如，见斯内登(Sneddon),1966]，(2.11)式和(2.12)式可称为$(2m+1)$重的“多重级数方程”组，(2.17)式和(2.18)式可称为$(2m+1)$重的“多重积分方程”组。另一方面，由(2.11)式、(2.12)式及(2.17)式、(2.18)式也可以看出，在每种情况下对应于两种不同类型的边界条件仅仅只有两个独立的核(即在部分边界上给定函数u，则对应于核$\cos\alpha x$，在其余边界上给定$\partial u/\partial y$，则对应于核$\alpha\cos\alpha x$)。而且，很清楚，不相交线段L_k的数目m不是对上述级数方程和积分方程的结构没有影响就

是对解的性质没有影响。因此，在本分册中级数方程和积分方程的多重性将理解为独立核的数目，而不是边界上区间的数目。在这种意义下，别的文献中讨论的三重级数方程和积分方程则对应于本分册中用 $N=1$ 所定义的对偶级数方程和对偶积分方程。

作为多重级数方程的一个例子，我们研究

(2.21) $$L(u)=0,\quad u=u(x_i),\quad x_i\in D,\quad i=1,2$$

(2.22) $$B_j(u)=f_j(s),\ j=1,\cdots,M\quad s\in C_j,\quad \sum_1^M C_j=C$$

其中 L 是一个二阶椭圆算子，$B_j(j=1,\cdots,M)$ 是一些不相同的一阶算子，$f_j(s)(j=1,\cdots,M)$ 是已知的函数，s 是 C 上的弧长，C 是区域 D 的边界。设方程(2.21)的解为下列形式

(2.23) $$u=\sum_1^\infty A_i\phi_i(x_j),\qquad j=1,\ 2$$

其中 ϕ_i 是已知函数，A_i 是未知系数。此外，设

(2.24) $$B_j(\phi_i)=\phi_{ji}(s)$$

于是边界条件(2.22)可以表示为

(2.25) $$\sum_{i=1}^\infty \phi_{ji}(s)A_i=f_j(s),\qquad j=1,\cdots,M,\qquad s\in C_j$$

在(2.25)式中有 M 个不同的核函数 ϕ_{ji} 集合($j=1,\cdots,M$; $i=1,2,\cdots$)，因此(2.25)式称为 M 重级数方程组。例如，在由 (2.1)—(2.6) 式定义的问题中，假如我们把 $y=0$ 上的边界条件修改成

(2.26) $$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0^+)=f_1(x),\qquad x\in C_1$$

(2.27) $$u(x,0^+)=f_2(x),\qquad x\in C_2$$

(2.28) $a(x)\dfrac{\partial}{\partial y}u(x,0^+)+b(x)u(x,0^+)=f_3(x), \quad x\in C_3$

其中$C_1+C_2+C_3=C=(0,b)$，C_i可以分别是不相交的子区间C_{ik}的联集，将(2.7)式代入上面三式，我们得到

(2.29) $$\sum_0^\infty A_n\alpha_n\cos\alpha_n x=-f_1(x), \qquad x\in C_1$$

(2.30) $$\sum_0^\infty A_n\cos\alpha_n x=f_2(x), \qquad x\in C_2$$

(2.31) $$\sum_0^\infty A_n[-\alpha_n a(x)+b(x)]\text{soo}\,\alpha_n x=f_3(x), \qquad x\in C_3$$

(2.29)—(2.31)式组成未知系数A_i的三重级数方程组。用类似的方法可以定义出多重积分方程。

第3章　混合边界值问题的解法

一般讲来，在连续统物理中解混合边界值问题有两种基本方法：

(a)　运算方法；

(b)　复变函数方法。

运算方法是利用有关超越函数的各种性质直接通过运算方法解对偶级数方程和对偶积分方程。在某些简单情况下封闭形式的解是有可能找到的。一般地，我们的目的是把对偶级数方程或对偶积分方程简化为一组无穷个代数方程或一个弗雷德霍姆（Fredholm）型的积分方程。关于运算技术比较全面的介绍可在斯内登的书（1966）中找到。

用复变函数理论解混合边界值问题的方法可分成三类：

(ｉ)直接利用复势理论和反射原理把混合边界值问题简化为分段全纯函数的黎曼-希尔伯特(Riemann-Hilbert)问题；

(ii)将函数论方法应用于对偶级数方程、对偶积分方程和奇异积分方程；

(iii)将对偶级数方程和对偶积分方程简化为奇异积分方程。

在本分册中，将不讨论运算方法。在一般的边界值问题，特别是混合边界值问题的所有解法中，最有效的方法或许是直接应用复势理论(如果能应用得上的话)。因此，假使能利用复势理论将问题公式化，同时区域的几何形状允许应用反

射原理，那么这个方法就具有明显的优越性，它将是直接的，所以应该优先被采用。不过，这个方法也有缺点，即它的应用范围比较狭窄，几乎完全限于平面弹性和二维势论中定义在相对讲来十分简单的区域中的问题。由于这个原因，对于这种方法我们不作详细阐述，仅仅通过一些简单的例子给以介绍。对于方法(ii)和(iii)我们将较详细地来讨论。

第 4 章　复势理论的直接应用

研究下列势论中的混合边界值问题(图 2)：

(4.1) $$\nabla^2 u = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0$$

(4.2) $$\lim_{y \to 0^+} \mu \frac{\partial u}{\partial y} = f_1(x), \quad x \in L$$

(4.3) $$u = f_2(x), \quad x \in L', \quad y = 0$$

(4.4) $$L = \sum_1^n L_k, \quad L_k = (a_k, c_k), \ a_k < c_k < a_{k+1}$$

$$k = 1, \cdots, n$$

其中 $f_i(x)(i=1,2)$ 是已知函数，L' 是 $-\infty < x < \infty$，$y=0$ 上 L 的余集。问题是要确定在实轴 $y=0$ 上满足边界条件(4.2)

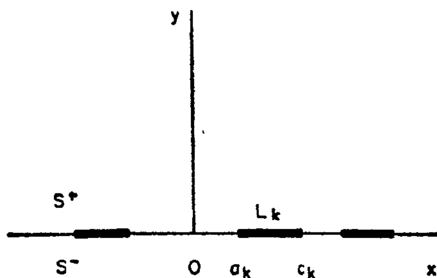


图 2　平面混合边界值问题

式和(4.3)式的函数 u。设调和函数 u 是复势 $F(z)(z=x+iy)$ 的实部，$F(z)$ 在上半平面 S^+(图 2)内是全纯的。利用柯西(Cauchy)-黎曼方程，u 的梯度可以表示成

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\overline{F'(z)} \tag{4.5}$$

或

$$2\frac{\partial u}{\partial x}=F'(z)+\overline{F'(z)},$$

$$-2i\frac{\partial u}{\partial y}=F'(z)-\overline{F'(z)} \tag{4.6}$$

令 $z\to t+i0$ ($\bar{z}\to t-i0$)，利用(4.6)式的边界值，(4.2)式和(4.3)式变成

$$-\left(\frac{2}{\mu}\right)if_1(t)=F'^{+}(t)-\overline{F}'^{-}(t),\quad t\in L \tag{4.7}$$

$$2f_2'(t)=F'^{+}(t)+\overline{F}'^{-}(t),\quad t\in L' \tag{4.8}$$

很容易证明，假使 $F'(z)$ 在 S^+ 内是全纯的，则 $\overline{F}'(z)$ 在 S^- 内是全纯的。注意，$F'(z)$ 仅仅定义在 S^+ 内，如果用下式把 $F'(z)$ 的定义推广到 S^- 中(参见本译丛第五分册《解析函数论》)

$$\phi(z)=\begin{cases}F'(z), & z\in S^+\\ -\overline{F}'(z), & z\in S^-\end{cases} \tag{4.9}$$

则(4.7)式和(4.8)式简化为下列黎曼-希尔伯特问题：

$$\phi^+(t)+\phi^-(t)=-\left(\frac{2i}{\mu}\right)f_1(t),\quad t\in L \tag{4.10}$$

$$\phi^+(t)-\phi^-(t)=2f_2'(t),\quad t\in L' \tag{4.11}$$

除去 L 以及 L' 上 $f_2'(t)\neq 0$ 的那部分以外，函数 $\phi(z)$ 在整个平面上是全纯的(在 $|z|=\infty$ 它可能有一个有限级的极点，这要取决于 u 的性质了)。因此 $\phi(z)$ 是个分段全纯函数。如果 u 的梯度在无穷远处为常数(例如不变的应力状态或热通量)，并用下式给出

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\mu}(p_0+iq_0),\quad x^2+y^2\to\infty \tag{4.12}$$

于是$F'(z)$在$|z|\to\infty$处将为下式给出的常数

$$(4.13)\qquad \lim_{z\to\infty} F'(z) = \left(\frac{1}{\mu}\right)(p_0 - iq_0)$$

参见本译丛的第五分册《解析函数论》①，并由(4.4)式，得到(4.10)的基本解为

$$X(z) = \prod_1^n (z-a_k)^{-1/2}(z-c_k)^{-1/2}$$

$$(4.14)\qquad X^+(t) = \begin{cases} -X^-(t), & t\in L \\ X^-(t), & t\in L' \end{cases}$$

其中 $X(z)$是 $\lim\limits_{|z|\to\infty} z^n X(z) = 1$ 的分支。由(4.10)—(4.12)式我们得到

$$(4.15)\qquad \frac{\phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\phi^-(t)}{X^-(t)} = \begin{cases} -(2i/\mu)[f_1(t)/X^+(t)] & t\in L \\ 2f_2'(t)/X^+(t), & t\in L' \end{cases}$$

(4.15)的在无穷远处有零级极点的解为

$$(4.16)\qquad \phi(z) = -\frac{X(z)}{\pi\mu}\int_L \frac{f_1(t)dt}{X^+(t)(t-z)} + \frac{X(z)}{\pi i}\int_{L'} \frac{f_2'(t)dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)\sum_0^n A_k z^k$$

其中A_0，…，A_n是任意常数。由(4.13)式及(4.9)式可以看

①原注 也可参见穆斯海里什维里 (Muskhelishvili) 的著作(1953，b）和加克霍夫（Gakhov）著作（1966）。

出

$$A_n = \left(\frac{1}{\mu}\right)(p_0 - iq_0) \tag{4.17}$$

其余的常数用函数$u(x,y)$的单值性条件来确定。(4.8)式和(4.11)式表示的是$y=0$上$\partial u/\partial x$的边界条件而不是u的边界条件。由于u是单值的，解必须满足下列条件：

$$f_2(c_k) = f_2(a_k) + \int_{a_k}^{c_k} \frac{\partial}{\partial x} u(x,0)dx, \qquad k=1,\cdots,n \tag{4.18}$$

或由(4.11)式，解必须满足

$$f_2(c_k) = f_2(a_k) + \frac{1}{2}\int_{a_k}^{c_k} [\phi^+(t) - \phi^-(t)]dt \qquad k=1,\cdots,n \tag{4.19}$$

上式给出一组n个线性代数方程以确定$A_0,\cdots,A_{n-1}$。例如，一个平面在实轴上有一列共线的“卸载”割线，在无穷远处有定值的“通量”$f_1=0=f_2$，在这种特殊情况下，解变为

(4.20)①
$$\phi(z) = X(z)\left[(1/\mu)(p_0 - iq_0) + \sum_0^{n-1} A_k z^k\right]$$

$$\int_{L_j} X^+(t)\left[(p_0 - iq_0) + \mu\sum_0^{n-1} A_k t^k\right]dt = 0, \qquad j=1,\cdots,n$$

$$\mu\frac{\partial u(t,0)}{\partial y} = iX^+(t)\left[p_0 - iq_0 + \mu\sum_0^{n-1} A_k t^k\right]$$

上面所叙述的方法还可以与保角映射结合起来，去解二维单连通区域的比较复杂的混合边界值问题。作为一个例子，我们研究图3(a)所示的半无限矩形带的混合边界值问题：

(4.21) $\nabla^2 u = 0,\quad u = u(x_1,x_2),\quad -b<x_1<b,\quad 0<x_2$

---

①译注　原文有印刷错误。

(4.22) $\partial u/\partial x_1 = 0, \quad x_1 = \mp b, \; x_2 > 0$

(4.23) $\lim_{x_2 \to 0^+} \mu \partial u/\partial x_2 = f(x_1), \; x_1 \in L$

(4.24) $u = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 \in L'$

(4.25) $L = \sum_1^n L_k, \quad L_k = (a_k, c_k), \quad a_k < c_k < a_{k+1}$

$$-b < (a_k, c_k) < b$$

其中L'是$x_2 = 0$，$-b < x_1 < b$上L的余集。这是在$x_2 = 0$上含有一组裂纹$a_k < x_1 < c_k$（$k = 1, \cdots, n$）的无限长带的反平面剪切问题，其中μ是介质的剪切模量。因为对于$x_2 = 0$

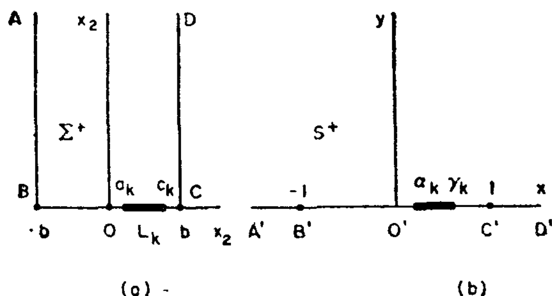


图 3　半无限带映射到半平面上

是对称的，所以只需要考虑介质的一半①。利用映射函数（见图 3）

(4.26) $\eta = x_1 + ix_2 = \omega(z) = \left(\frac{2b}{\pi}\right)\sin^{-1}z, \quad z = x + iy$

---

①原注　这个问题与第 2 章中用对偶级数方程表示的问题（见图 1）是相同的。

长带的$\sum^+$被映射成S^+，边界上的点A,B,O,C,D被映射成A',B',O',C',D'，线段$L_k=(a_k,c_k)$映射成$\Gamma_k=(\alpha_k,\gamma_k)$，其中

$$\alpha_k=\sin\left(\frac{\pi a_k}{2b}\right),\qquad \gamma_k=\sin\left(\frac{\pi c_k}{2b}\right), \tag{4.27}$$

$$-1<(\alpha_k,\ \gamma_k)<1$$

设

$$u=\mathrm{Re}F(\eta),\qquad G(z)=F(\omega(z)) \tag{4.28}$$

于是$G(z)$在S^+内将是全纯的，且$u=\mathrm{Re}G$。利用记号$u(x_1,x_2)=u(x,y)$，$(x_1,x_2)\epsilon\Sigma^+$，$(x,y)\epsilon S^+$及在$z$平面上方向导数的定义〔见邱吉尔(Churchill)，1948〕，我们有

$$\nabla^2 u(x,y)=0,\qquad (x,y)\in S^+ \tag{4.29}$$

$$u(x,o^+)=0,\qquad x\in\Gamma' \tag{4.30}$$

$$\mu\partial u(x,o^+)/\partial y=\begin{cases}\omega'(x)\ \ g(x), & x\in\Gamma\\ 0 & x>1\end{cases} \tag{4.31}$$

可以看出这个问题与由（4.1）—（4.4）式定义的问题是相同的，在z平面上是很容易求解的。在这个问题里，因为Γ'是有限的，在Γ'上的分枝由下式给出

$$\phi(z)=\begin{cases}G'(z), & z\in S^+\\ \overline{G}'(z), & z\in S^-\end{cases} \tag{4.32}$$

例如，研究图4所示的反平面剪切问题，在$x_2=\mp\infty$处带受到均匀剪切作用$t_{23}=q_0$，作用力$f(x_1)$等于零。由(4.16)式可找出解为

$$\phi(z)=A_0[(z-\alpha)(z-\gamma)]^{-1/2},$$

$$t_{23}(x_1,0)=q_0(1-t^2)^{1/2}/[(t-\alpha)(\gamma-t)]^{1/2} \tag{4.33}$$

$$a < t < c$$

$$t=\sin(\pi x_1/2b),\ \alpha=\sin(\pi a/2b),\ \gamma=\sin(\pi c/2b)$$

其中常数A_0由下式得到

$$\int_a^c t_{23}(x_1,0)dx_1 = 2aq_0$$

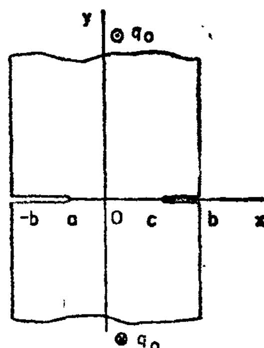


图 4

复势的另外应用可在本译丛的第五分册《解析函数论》中找到。关于复变函数方法在平面弹性理论问题中的应用的详尽介绍可参见穆斯海里什维里的著作（1953 b）〔也可见格林(Green)和策尔纳（Zerna）的书，1954〕。这个方法已被广泛地应用于接触问题中，例如，可见加林（Galin，1953)的著作，对于这个课题的更广泛的研究以及在两种不同的弹性材料中的裂纹问题的应用，可参阅艾多温〔(Erdogan)1963，1965a，b，1966〕、英格兰〔(England)，1965，1966〕、恰内巴诺夫〔(Cherepanov)1962〕、布朗（Brown）和艾多温（1968）以及克莱门茨〔(Clements）1971〕的论文。

第5章　混合边界值问题中核的性质

混合边界值问题中，在光滑边界的两部分分别用两种不同的算子给出边界条件，这两部分边界的交点称之为奇异点（例如，图1中的点$x=a_k$和$x=c_k$）①。在复势的直接应用中，这些点是复平面上基本解的分枝点。通过检查基本解可以直接得到解的奇异性质。在绝大多数问题中奇异点是带有$\mp\frac{1}{2}$次幂的寻常分枝点〔即在分枝割线上$X^+(t)=-X^-(t)$，$X(z)$是基本解〕。

在对控制混合边界值问题的对偶级数方程或对偶积分方程应用运算方法时，假使奇异点是一个寻常的分枝点，找出它的确切奇异性是没有困难的。但是，如果奇异点的幂不再是$\mp\frac{1}{2}$的话（例如，带摩擦的接触问题，非均匀弹性固体中的裂纹问题），用运算法来研究对偶级数方程和对偶积分方程，即使在简单的情况下，也是极其困难的。由于这个原因以及标准运算方法的实际应用，几乎完全限于这样的混合边界值问题，即仅有一个未知函数、边界上具有不同边界条件的部分仅有两部分（顶多三部分），因此需要一种更有效的方法来解这些问题的方程。这样的方法是把对偶级数方程和对

①原注　在三维问题中两部分边界的连接部分是条线，称之为奇异线。例如，任意外形的压印机压在一个弹性固体上，接触面的周界就是条奇异线。

偶积分方程简化为一组奇异积分方程，或者是直接通过一组奇异积分方程把问题表示出来。

在引进奇异积分方程的方法之前，有必要讨论一下混合边界值问题解在奇异点邻域的某些一般性质。首先我们注意，上章讨论的简单的黎曼-希尔伯特问题〔(4.10)，(4.11)〕的基本解满足下列齐次边界条件：

$$X^+(t)+X^-(t)=0,\quad t\in L \tag{5.1}$$

$$X^+(t)-X^-(t)=0,\quad t\in L' \tag{5.2}$$

无需详尽地研究，很明显，在这样简单的情况下(5.1)和(5.2)的最一般解为

$$X(z)=P(z)\prod_1^n(z-a_k)^{-1/2+N_k}(z-c_k)^{1/2+M_k} \tag{5.3}$$

$$\kappa=-\sum_1^n(N_k+M_k)$$

其中$P(z)$是任意的整函数，$(N_k, M_k)=0$，$\mp1, \mp2\cdots(k=1,\cdots,n)$①，$\kappa$ 称为**解的指数**。由(4.15)式可看出，设 $P(z)\equiv1$ 并不失去一般性。在希尔伯特问题的一般性研究中，N_k 和 M_k 的值基本上被假设为 $-1<\frac{1}{2}+N_k<1$，$-1<\frac{1}{2}+M_k<1$。而 N_k 和 M_k 的实际值根据解 ϕ 所属的“类”而定。在最一般的类 h_0 中，$N_k=0$，$M_k=-1$ $(k=1,\cdots,n)$，意谓着在所有端点的解具有次小于1的无穷值。类 h_q 的解在 q 个端点是有界的，而在其余的端点具有可积奇异性（见穆斯海里什维里，1953 a)。

所有这一切很明显地都是根据这样一个简单的物理事

①校注 原文有印刷错误。

实，即在混合边界值问题中未知函数常常① 为“位势型”的量（如位移、温度、质量浓度、静电势②或速度势）或者为“通量型”的量（如应力、应变、位错、热通量、质量扩散速率、静电场或速度）②。另外，问题的物理本质要求在奇异点“势”是有界的，而“通量”或更一般地说在奇异点势的任意方向导数具有可积奇异性。这个事实被用来确定关于奇异积分方程的基本解的类和指数（见下面几章的例子）。

另一个要研究的重要问题是：二维势论中的一般边界值问题。设 C 是区域的边界。在边界上 u 的法向导数和切向导数用下列式子联系着

$$\frac{\partial}{\partial s}u(s)=\frac{1}{\pi}\int_C\frac{dt}{t-s}\frac{\partial}{\partial n}u(t)+\int_C k_1(s,t)\frac{\partial}{\partial n}u(t)dt,\quad s\in C \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}u(s)=-\frac{1}{\pi}\int_C\frac{dt}{t-s}\frac{\partial}{\partial t}u(t)+\int_C k_2(s,t)\frac{\partial}{\partial t}u(t)dt,\quad s\in C \tag{5.5}$$

---

①原注　在某些问题中可以有“高阶势”，它在研究中并不引起任何困难。弹性理论中的艾里（Airy）应力函数和洛夫（Love）函数以及扁壳理论中的法向位移和应力函数就有这些例子。例如在接触问题和裂纹问题中，应力、位移和应力函数的性质分别为 $r^{-1/2}$、$r^{1/2}$ 和 $r^{3/2}$，r 是离奇异点的距离。

②校注　原文写静电场和电荷密度是错误的。在静电学中“位势型”的量是静电势，“通量型”的量是静电场。因为通量型的量必须是个向量，电荷密度却是个标量。

其中 s 和 t 是边界的弧长，n 是外法线方向，k_1 和 k_2 是弗雷德霍姆核，它们取决于区域的几何形状。例如，单位圆中的对称问题〔即 $u(r,\theta)=u(r,-\theta)$〕，不难证明

$$(5.6)\qquad \frac{\partial}{\partial\theta}u(1,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta_0-\theta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\theta_0+\theta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial r}u(1,\theta_0)d\theta_0,\qquad 0<\theta<\pi$$

$$(5.7)\qquad \frac{\partial}{\partial r}u(1,\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta_0-\theta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\theta_0+\theta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}u(1,\theta_0)d\theta_0,\qquad 0<\theta<\pi$$

其中核的特征部分(*dominant part*)(在$\theta=\theta_0$)是$1/\pi(\theta_0-\theta)$。类似地,对于半平面（$y<0$，$-\infty<x<\infty$）我们有下列著名的一对希尔伯特变换式：

$$(5.8)\qquad \frac{\partial}{\partial x}u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-x}\frac{\partial}{\partial y}u(t,0)\qquad -\infty<x<\infty$$

$$(5.9)\qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,0)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-x}\frac{\partial}{\partial t}u(t,0)\qquad -\infty<x<\infty$$

用类似的方法，研究介质 $y<0$，$-\infty<x<\infty$的平面弹性问题，介质的弹性常数为 κ，μ（其中 μ 是剪切模量，对于平面应变状态 $\kappa=3-4\nu$，对于广义平面应力状态 $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$，ν 是泊松比）。利用波西涅斯克（Boussinesq）的基本解能够证明，在边界 $y=0$ 上，应力 t_{yy}、t_{xy} 和位移导数 $\partial u_x/\partial x$，$\partial u_y/\partial x$ 用下列式子相互联系着

$$(5.10)\qquad \frac{4\mu}{1+\kappa}\frac{\partial}{\partial x}u_x(x,0)$$

$$= \gamma t_{yy}(x,0) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{x_0 - x} t_{xy}(x_0,0)$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$(5.11) \quad \frac{4\mu}{1+\kappa}\frac{\partial}{\partial x}u_y(x,0)$$

$$= -\gamma t_{xy}(x,0) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{x_0 - x} t_{yy}(x_0,0)$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$(5.12) \quad \frac{1+\gamma}{2\mu} t_{yy}(x,0)$$

$$= -\gamma \frac{\partial}{\partial x} u_x(x,0) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{x_0 - x}\frac{\partial}{\partial x_0} u_y(x_0,0)$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$(5.13) \quad \frac{1+\gamma}{2\mu} t_{xy}(x,0)$$

$$= \gamma \frac{\partial}{\partial x} u_y(x,0) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_0}{x_0 - x}\frac{\partial}{\partial x_0} u_x(x_0,0)$$

$$-\infty < x < \infty$$

其中常数$\gamma = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$。很明显，假使介质被一条光滑曲线$C$所限定，(5.10)—(5.13)式给出了积分方程的特征部分，该积分方程把曲面上位移向量的法向分量u_n和切向分量u_s的切向导数与t_{nn}、t_{ns}联系起来了，而t_{nn}和t_{ns}是作用在曲面上应力的法向分量和切向分量。例如，(5.10)式可用下式代替

$$(5.14) \quad \frac{4\mu}{1+\kappa}\frac{\partial}{\partial s}u_s(s) = \gamma t_{nn}(s) + \frac{1}{\pi}\int_C \frac{ds_0}{s_0 - s} t_{sn}(s_0)$$

$$+ \int_C \Big[k_{11}(s,s_0)t_{nn}(s_0) + k_{12}(s,s_0)t_{sn}(s_0)\Big] ds_0$$

$$s \in C$$

其中 s 和 s_0 是沿着 C 度量的坐标，n 是法线方向，k_{ij} $(i,j=1,2)$ 是依赖于介质几何形状的弗雷德霍姆核。类似地，在轴对称问题中，假使边界曲面是平面或圆柱面，对应的积分方程的特征部分与（5.10）—（5.13）式是等同的〔例如见艾多温，1966；艾多温和奥兹伯克（Ozbek），1969〕。

因为人们并不总是能够把混合边界值问题直接表示为复势的黎曼-希尔伯特问题，又因为奇异积分方程对于研究解的奇异性质是高度有效的，所以把问题简化为一个奇异积分方程是非常值得的（为了正确地理解问题，在某些情况下，这样作甚至是必要的）。在这一章中给出的积分方程和所作的说明是用来指导如何通过奇异积分方程将混合边界值问题公式化。特别是在解对偶级数方程和对偶积分方程时，它们对定义辅助函数有极大的帮助。

第 6 章　将对偶级数方程简化为奇异积分方程

为了应用函数论方法来解对偶级数方程，首先必须把它们简化成一个奇异积分方程。从上章一般性的讨论中可以看出，在很大的一类混合边界值问题中，至少根据物理意义来讲，这样作将是可能的。事实上，这样作的困难仅在于如何从核中找出奇异部分来，而核是个无穷级数。因为这种方法很简单，本章将通过一个特殊的例子来介绍这个方法，同时指出该方法的某些基本特点。

研究下列在第 2 章中导出的对偶级数方程〔见（2.9）和（2.10）式及图 1〕：

$$\lim_{y\to 0^+}\sum_{1}^{\infty}\alpha_n A_n e^{-\alpha_n y}\cos\alpha_n x=-(1/\mu)f(x),\quad x\in L \tag{6.1}$$

$$\sum_{0}^{\infty}A_n\cos\alpha_n x=0,\quad x\in L',\ \alpha_n=\pi n/b \tag{6.2}$$

$$L=\sum_{1}^{m}L_k,\quad L_k=(a_k,c_k) \tag{6.3}$$

$$0<\cdots<a_k<c_k<a_{k+1}<\cdots<b$$

其中 A_n（$n=1,2,\cdots$）是未知系数，L' 是 $0<x<b$ 上 L 的余集。未知函数 $u(x,y)$ 通过 A_n（带有一个附加的任意常数 A_0）被表示成〔见（2.7）式〕

(6.4)　$u(x,y)=\sum_{1}^{\infty}A_n e^{-\alpha_n y}\cos\alpha_n x + A_0,\quad 0<x<b,\ 0<y$

应该指出，对于任意的m，应用标准的运算方法解（6.1）、（6.2）是不可能的。

在这个问题里，未知函数u是个"位势型"的量，在边界$y=0$，$0\leqslant x\leqslant b$上它是有界的。于是,可以假设级数(6.2)是一致收敛的，因此它可以逐项微分。对它微分后，我们在边界上定义一个新的未知函数$g(x)$

(6.5)　$g(x)=\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial x}=-\sum_{1}^{\infty}\alpha_n A_n\sin\alpha_n x,\quad 0<x<b$

由（6.2）式可知，在L'上$g(x)=0$，（6.5）式给出

(6.6)　$\alpha_n A_n=-\left(\dfrac{2}{b}\right)\int_L g(t)\sin\alpha_n t dt$

将（6.6）式代入（6.1）式，我们得到

(6.7)　$\lim\limits_{y\to 0+}\left(\dfrac{2}{b}\right)\int_L g(t)dt\sum_{1}^{\infty}e^{-\alpha_n y}\sin\alpha_n t\cos\alpha_n x$

$$=\left(\frac{1}{\mu}\right)f(x),\quad x\in L$$

利用公式

(6.8)　$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\varepsilon n}\sin n\lambda=\sin\lambda/[2(\mathrm{ch}\varepsilon-\cos\lambda)]$

求级数的和，然后取极限（见艾多温，1968），由（6.7）式得到

(6.9)　$\dfrac{1}{2b}\int_L g(t)\left[\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2b}(t-x)+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2b}(t+x)\right]dt$

$$= \frac{1}{\mu} f(x), \qquad x \in L$$

即使我们给出这个方程的封闭形式解，可是我们要注意，它是一般形式的解

$$\frac{1}{\pi}\int_L g(t)\frac{dt}{t-x} + \int_L k(x,t)g(t)dt = \frac{1}{\mu}f(x)$$

(6.10) $x \in L$

$$k(x,t) = \frac{1}{2b}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2b}(t-x) - \frac{2b}{\pi}\frac{1}{t-x} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2b}(t+x)\right]$$

其中$k(x,t)$是有界的核。(6.6)式表明，在L'上$g(x)=\partial u/\partial x$而不是$u$等于零。由第4章的论证〔见(4.18)〕可以看出，方程（6.9）必须利用下列单值条件才能解出：

(6.11) $$\int_{L_k} g(t)dt = 0, \qquad k = 1, \cdots, m$$

利用公式

(6.12) $\operatorname{ctg}(a-b) + \operatorname{ctg}(a+b) = 2\sin 2a/(\cos 2b - \cos 2a)$

奇异积分方程（6.9）可以被修改为

(6.13) $$\frac{1}{b}\int_L \frac{g(t)\sin(\pi t/b)}{\cos(\pi t/b) - \cos(\pi x/b)}dt = -\frac{1}{\mu}f(x), \qquad x \in L$$

作下列简单的变数变换

$$\cos\frac{\pi t}{b} = r, \qquad \cos\frac{\pi x}{b} = s, \qquad g(t) = \varphi(r)$$

(6.14)

$$\frac{1}{\mu}f(x) = h(s)$$

$$\cos\frac{\pi a_k}{b} = \alpha_k, \qquad \cos\frac{\pi c_k}{b} = \gamma_k, \qquad \Gamma_k = (\gamma_k, \alpha_k)$$

$$\Gamma = \sum_1^m \Gamma_k$$

于是（6.13）和（6.11）式可分别写成

$$(6.15)\qquad (1/\pi)\int_L p(r)dr/(r-s)=h(s),\qquad s\in\Gamma$$

$$(6.16)\qquad \int_{\gamma_k}^{\alpha_k} p(r)dr/(1-r^2)^{1/2}=0,\qquad k=1,\cdots,m$$

方程（6.15）的解是很简单的（例如，见穆斯海里什维里，1953 a）。定义下列分段全纯函数

$$(6.17)\qquad \phi(z)=(1/2\pi i)\int_{-1}^{1} p(r)dr/(r-z)$$

其中复变数 $z=r+ir'$，$p(r)$作为密度。对于 $\phi(z)$，普利麦吉（Plemelj）公式给出（例如，见穆斯海里什维里，1953 a）

$$(6.18)\qquad \phi^+(r)-\phi^-(r)=p(r),\qquad -1<r<1$$

$$(6.19)\qquad \phi^+(r)+\phi^-(r)=(1/\pi i)\int_{-1}^{1} p(s)ds/(s-r)\qquad -1<r<1$$

这里，r 的范围 $-1<r<1$ 对应于整个边界$0<t<b$。设 Γ 和 Γ' 对应于（6.1）式和（6.2）式中的 L 和 L'。因为在 L' 上 $g(t)=0$，由（6.15）、（6.18）和（6.19）式我们得到下列简单的黎曼-希尔伯特问题：

$$(6.20)\qquad \phi^+(r)-\phi^-(r)=0,\qquad r\in\Gamma'$$

$$(6.21)\qquad \phi^+(r)+\phi^-(r)=-ih(r),\qquad r\in\Gamma$$

（6.20）和（6.21）的解，它在无穷远处等于零，这个解可以表示为〔见第 4 章；也可见穆斯海里什维里，1953a〕

$$(6.22)\qquad \phi(z)=-\frac{X(z)}{2\pi}\int_\Gamma \frac{h(s)ds}{X^+(s)(s-z)}+X(z)\sum_{0}^{\kappa-1}B_k z^k$$

其中 κ 是解的指数，$B_k(k=0,1,\cdots,\kappa-1)$ 是任意常数。在这个问题里，指数的值决定于端点 a_1 和 c_m 的位置（图 1）。若 $a_1>0$ 和 $c_m<b$（即$\gamma_m>-1$，$\alpha_1<1$），则函数在所有的端点

具有可积奇异性，解是h_0类，指数是$\kappa=m$（m是实轴上割线的数目），基本解成为

$$(6.23)\qquad X(z)=\prod_{1}^{m}(z-\gamma_k)^{-1/2}(z-\alpha_k)^{-1/2}$$

（6.22）式中出现的m个任意常数B_0，B_1，…，B_{m-1}可由（6.16）式给出的m个条件确定出。

另一方面，若$a_1=0$，$c_m<b$（即$\gamma_m>-1$，$\alpha_1=1$，它对应于反平面剪切中的一个刃型裂纹情况），于是函数在α_1是有界的，在其余$2m-1$个端点具有可积奇异性。这种情况的解属于h_1类，指数是$\kappa=m-1$，基本解可以表示成〔见（5.3）式〕

$$(6.24)\qquad X(z)=\prod_{1}^{m}(z-\gamma_k)^{-1/2}(z-\alpha_1)^{1/2}\prod_{2}^{m}(z-\alpha_k)^{-1/2}$$

这里$m-1$个常数B_0，$B_1,\cdots,B_{k-2}$可由单值性条件（6.16）$k=2$，3，…，m确定出（很明显，刃型割线$0\leqslant x\leqslant c_1$或$1\geqslant r>r_1$对于$u$的单值性没有任何影响）。情况$c_m=b$，$a_1>0$或$c_m=b$，$a_1=0$可以用类似的方法处理。

在$\phi(z)$被得到以后，未知函数$g(t)$可由（6.14），（6.18）和（6.22）得到

$$(6.25)\qquad g(t)=p(r)=\phi^{+}(r)-\phi^{-}(r)$$

$$=-X(r)\left[\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{h(s)ds}{X(s)(s-r)}-2\sum_{0}^{\kappa-1}B_k r^k\right]$$

$$r\in\Gamma$$

例如，对于$m=1$，$a_1=0$，$0<c_1<b$，$(1/\mu)f(x)=-\tau_0/\mu=-h_0=h(s)$（即一个刃型割线受到定值通量的例子），我们得到

$$(6.26)\quad p(r)=\left(\frac{1-r}{r-\gamma_1}\right)^{1/2}\frac{h_0}{\pi}\int_{\gamma_1}^{1}\left(\frac{s-\gamma_1}{1-s}\right)^{1/2}\frac{ds}{s-r}$$

$$\gamma_1<r<1,\quad \gamma_1=\cos\frac{\pi c_1}{b}$$

$$(6.27)\quad g(x)=\frac{\tau_0}{\mu}\frac{\sin(\pi x/2b)}{[\sin^2(\pi c/2b)-\sin^2(\pi x/2b)]^{1/2}}$$

作为另一个例子我们研究$m=1$，$0<a_1<c_1<b$及$(1/\mu)f(x)=-\tau_0/\mu$（即单一的内割线情况）。这时

$$\alpha_1=\cos(\pi a_1/b),\quad \gamma_1=\cos(\pi c_1/b)$$

由（6.22）式、（6.18）式和（6.16）式我们得到

$$p(r)=\frac{\tau_0}{\mu}[(\alpha_1-r)(r-\gamma_1)]^{-1/2}\left(r-\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}+C_0\right)$$

$$\gamma_1<r<\alpha_1$$

$$(6.28)\quad \begin{aligned} C_0&=1+\frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}-\frac{1+\gamma_1}{K(k)}\prod\left(-\frac{\alpha_1-\gamma_1}{1+\alpha_1},\ k\right)\\ k^2&=\frac{2(\alpha_1-\gamma_1)}{(1-\gamma_1)(1+\alpha_1)}\end{aligned}$$

$$\prod(\nu,\ k)=\int_0^1\frac{dt}{(1+\nu t^2)[(1-t^2)(1-k^2t^2)]^{1/2}}$$

$$\nu>-1,\ 0<k<1$$

其中K和Π分别是第一类和第三类完全椭圆积分。

注记(i)　假使（6.2）式不是齐次的，$g(t)$在L'上将具有已知的值，（6.9）式只需要改变右端就行了。

注记(ii)　（6.1）式中放在求和号外面的极限的重要性现在可看清楚了。假使极限放在求和号之内，(a)调换（6.7）式中积分与求和次序的运算将是有问题的，(b)给出核的（6.8）式的无穷级数将是没有意义的。

注记(iii) 由（6.5）式给出的新的未知（或辅助）函数 $g(x)$ 的定义具有第5章所讨论的一般性质①。这里按（6.5）式那样选取 $g(x)$ 是为了使得合成核的奇异性是柯西型的，以便在求解过程中能应用函数论方法。可以指出，函数 $u(x,0)$，$x\in L$ 也能被选取为辅助函数。在这种情况下，不管 A_0 的值如何，核将为下列形式

$$(6.29)\qquad \lim_{y\to 0+}\frac{d}{d\lambda}\frac{\sin\lambda}{2[ch(\pi y/b)-\cos\lambda]},\qquad \lambda=\frac{\pi}{b}(t\mp x)$$

这种形式在 $t=x$ 点给出一个不合乎要求的强奇点，即 $(t-x)^{-2}$。另一方面，为了量纲的一致，假使我们对（6.1）式积分，从0积到 x，对偶级数方程变为

$$(6.30)\qquad \lim_{y\to 0+}\sum_{1}^{\infty}A_n e^{-\alpha_n y}\sin\alpha_n x=-(1/\mu)\int_0^x f(t)dt,\qquad x\in L$$

$$(6.31)\qquad \sum_{1}^{\infty}A_n\cos\alpha_n x=0,\qquad x\in L'$$

这里设 $A_0=0$，并不失去任何一般性②。若我们定义

$$(6.32)\qquad u(x,0)=G(x)=\sum_{1}^{\infty}A_n\cos\alpha_n x,\qquad 0<x<b$$

利用（6.31）式，系数 A_n 可以表示为

$$(6.33)\qquad A_n=(2/b)\int_L G(t)\cos\alpha_n t dt$$

将（6.33）式代入（6.30）式，我们得到

---

①译注 原文有印刷错误。

②原注 在反平面剪切问题中，A_0 对应垂直于 (x, y) 平面的刚体位移。一般讲来，它是一个加性常数势，对于通量的分布没有影响。

$$(6.34)\quad \frac{1}{2b}\int_L G(t)\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2b}(t-x)-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2b}(t+x)\right]dt$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^x f(t)dt,\qquad x\in L$$

很明显，(6.34) 也是一个具有柯西型奇异项的奇异积分方程。从本章讨论的简单例子中可以看出，选择辅助函数时从物理角度考虑问题的重要性，当然辅助函数的选取要使积分方程具有所要求的奇异性。事实上，如果目的是要把对偶级数方程或对偶积分方程化简为奇异积分方程，只要记住下列基本原则就行了：假使两个函数 f 和 g 通过下列具有柯西特征核的积分方程相联系，即

$$(6.35)\quad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_L g(t)\frac{dt}{t-x}+\int_L k(x,t)g(t)dt,\quad x\in L$$

或通过下列更一般的方程相联系

$$(6.36)\quad f(x)=\gamma g(x)+\frac{1}{\pi}\int_L g(t)\frac{dt}{t-x}$$

$$+\int_L k(x,t)g(t)dt,\qquad x\in L$$

很明显，$f(x)$和 $g(x)$必须具有相同的物理量纲。在 (6.35) 式和 (6.36) 式中，f 和 g 可以是实函数或复变函数，L 是不相交的光滑弧 L_k 的联集，γ 是个无量纲常数。就因为这个原因，选取一对函数作为 $u(x,\ 0)$ 和 $\partial u(x,\ 0)/\partial y$〔见 (6.29) 式〕所得的结果是没有意义的，而选取一对函数作为$\partial u(x,0)/\partial x$ 和$\partial u(x,0)/\partial y$ 或$u(x,0)$和$\int$〔$\partial u(x,0)/\partial y$〕$dx$〔见 (6.9) 式和 (6.34) 式〕得到的是简单的奇异积分方程。

注记(iv) 如前所述，在把对偶级数方程简化为奇异积

分方程的过程中主要问题是分离出核的特征部分。在前面的例题中，给出核的无穷级数是可以加起来成为封闭形式的，所以在分离出柯西奇异项时没有什么困难。在更复杂的问题中，如果适当地选取辅助函数，知道了给出核的无穷级数的发散部分就可以找出柯西奇异项，通过分析级数的渐近性质（例如，见第9章），人们总是能够做到这一点的。

第7章 将对偶积分方程简化为奇异积分方程

虽然用运算方法解对偶积分方程的文献是非常广泛的（例如，见斯内登，1966），但仔细地研究将会发现，几乎所有的这些方法都是处理均匀介质带有两部分或三部分边界条件的标准混合边界值问题。在使用这些方法的时候，介质的几何形状或本构关系的稍微变化，在某些情况下，就会引起无法克服的困难。可是另一方面，适当地选取辅助函数，则能够毫无困难地把一组给定的对偶积分方程简化为一个奇异积分方程。这里主要问题是分离出核的特征部分，而这是用一般常规方法通过渐近分析能够做到的。在所得的奇异积分方程组中，未知函数通常代表目前感兴趣的物理量。因此，通过对积分方程组的特征部分的简单分析研究，就可能得到许多关于求解方法的知识。

将对偶积分方程简化为奇异积分方程的方法与上章所述的方法十分类似。在本章和下一章中，我们将通过两个比较特殊的混合边界值问题来介绍这个方法。在这一章中所研究的问题将会导出第一类奇异积分方程组，而下一章所研究的问题将给出第二类奇异积分方程组。

研究图5所示的四分之一平面上势论的混合边界值问题。这个问题是要在四分之一平面内确定一个调和函数 $u(x,y)$，在这个区域内沿着不相交弧 $L=\Sigma_1^n L_k$ 和 $M=\Sigma_1^m M_k$

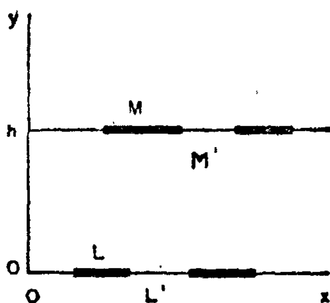


图 5　四分之一平面的混合问题

作割线，在割线上受到给定的法向通量的作用。为了方便起见，在 $x>0$，$0<y<h$ 区域，记 $u=u_1$，而在 $x>0$，$y>h$ 区域，记 $u=u_2$。于是问题可以表述成：

(7.1)　$$\nabla^2 u_1 = 0, \quad x>0, \quad 0<y<h$$

(7.2)　$$\nabla^2 u_2 = 0, \quad x>0, \quad y>h$$

(7.3)　$$\partial u/\partial x = 0, \quad x=0, \quad y>0$$

(7.4)　$$u_1(x,0) = 0, \quad x\in L'$$

(7.5)　$$\lim_{y\to 0+} \mu\partial u_1/\partial y = f_1(x), \quad x\in L$$

(7.6)　$$u_1 = u_2, \quad x\in M', \; y=h$$

(7.7)　$$\partial u_1/\partial y = \partial u_2/\partial y, \quad x\in M+M', \; y=h$$

(7.8)　$$\lim_{y\to h-} \mu\partial u_1/\partial y = f_2(x) = \lim_{y\to h+} \mu\partial u_2/\partial y, \quad x\in M$$

(7.9)
$$L = \sum_{1}^{n} L_k, \quad L_k = (a_k, c_k)$$
$$M = \sum_{1}^{m} M_k, \quad M_k = (b_k, d_k)$$

其中 L' 和 M' 分别是在 $0\leqslant x<\infty$ 中 L 和 M 的余集。这儿假设这是解的"摄动"部分，所以当 $x^2+y^2\to\infty$ 时 u 趋向于

零。从物理上讲，这个问题可以表示一个半空间的反平面剪切问题，这个半空间沿着 $y=0$，$y=\mp h$ 有三排割线，它们对于 $y=0$ 平面是对称的，割线的表面受到指定的作用力。

满足（7.3）式及在无穷远处为正则条件的调和函数 u_1 和 u_2 可以表示成下列傅里叶积分：

$$u_1(x,y)=\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty [A_1(\alpha)e^{-\alpha y}+A_2(\alpha)e^{\alpha y}]\cos\alpha x\,d\alpha \tag{7.10}$$

$$u_2(x,y)=\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty B(\alpha)e^{-\alpha y}\cos\alpha x\,d\alpha \tag{7.11}$$

连续性条件（7.7）式给出

$$A_2=(A_1-B)e^{-2\alpha h} \tag{7.12}$$

由（7.5）式及对（7.4）式的求导（为了量纲的一致），我们得到

$$\lim_{y\to0+}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[-A_1e^{-\alpha y}+(A_1-B)e^{-\alpha(2h-y)}]\alpha\cos\alpha x\,d\alpha$$
$$=\frac{1}{\mu}f_1(x),\qquad x\in L \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u_1(x,0)$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[A_1+(A_1-B)e^{-2\alpha h}]\alpha\sin\alpha x\,d\alpha=0,\ x\in L' \tag{7.14}$$

类似地，从（7.8）式和（7.6）式我们得到

$$\lim_{y\to h+}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Be^{-\alpha y}\alpha\cos\alpha x\,d\alpha=-\frac{1}{\mu}f_2(x),\qquad x\in M \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_2-u_1)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty 2(B-A_1)e^{-\alpha h}\alpha\sin\alpha x\,d\alpha=0 \tag{7.16}$$
$$x\in M',\ y=h$$

方程（7.13）—（7.16）组成关于未知函数 $A_1(\alpha)$ 和 $B(\alpha)$

的一组对偶积分方程。如果 L 和 M 不相同，要解这组方程，标准的运算方法是无效的。为了把方程（7.13)—(7.16）简化为一组奇异积分方程，我们定义下列辅助函数：

(7.17) $$g_1(x)=\partial u_1(x,0)/\partial x$$

$$=-\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty [A_1+(A_1-B)e^{-2\alpha h}]\alpha\sin\alpha x d\alpha$$

(7.18) $$g_2(x)=\frac{1}{2}\partial[u_2(x,h)-u_1(x,h)]/\partial x$$

$$=-\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty (B-A_1)e^{-\alpha h}\alpha\sin\alpha x d\alpha$$

$$0\leqslant x<\infty$$

利用（7.14）式和（7.16）式，则（7.17）式和（7.18）式的傅里叶反演变换给出

(7.19) $$\alpha[A_1+(A_1-B)e^{-2\alpha h}]=-\int_L g_1(t)\sin\alpha t dt$$

(7.20) $$\alpha(B-A_1)e^{-\alpha h}=-\int_M g_2(t)\sin\alpha t dt$$

或者求解 A_1 和 B，我们得到

(7.21) $$\alpha A_1(\alpha)=-\int_L g_1(t)\sin\alpha t dt-e^{-\alpha h}\int_M g_2(t)\sin\alpha t dt$$

(7.22) $$\alpha B(\alpha)=-\int_L g_1(t)\sin\alpha t dt-(e^{\alpha h}+e^{-\alpha h})$$

$$\times\int_M g_2(t)\sin\alpha t dt$$

将（7.21）式和（7.22）式代入（7.13）式和（7.15）式，利用下列积分公式

(7.23) $$\int_0^\infty \sin\alpha t\cos\alpha x e^{-\alpha y}d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t-x}{(t-x)^2+y^2} + \frac{t+x}{(t+x)^2+y^2} \right]$$

并取极限，我们得到

$$(7.24)\quad \frac{1}{\pi}\int_L \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) g_1(t)dt$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_M \left(\frac{t-x}{(t-x)^2+h^2} + \frac{t+x}{(t+x)^2+h^2} \right) g_2(t)dt$$

$$= \frac{1}{\mu} f_1(x), \qquad x \in L$$

$$(7.25)\quad \frac{1}{\pi}\int_M \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) g_2(t)dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_L \left(\frac{t-x}{(t-x)^2+h^2} + \frac{t+x}{(t+x)^2+h^2} \right) g_1(t)dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_M \left(\frac{t-x}{(t-x)^2+4h^2} + \frac{t+x}{(t+x^2)+4h^2} \right) g_2(t)dt$$

$$= \frac{1}{\mu} f_2(x), \qquad x \in M$$

方程（7.24）和（7.25）形成一组用来确定未知函数 g_1 和 g_2 的第一类奇异积分方程组。很明显，方程可以写成下列形式

$$(7.26)\quad \frac{1}{\pi}\int \frac{g_i(t)dt}{t-x} + \int \sum_1^2 k_{ij}(x,t) g_j(t)dt = \frac{1}{\mu} f_i(x)$$

$$i = 1, 2$$

其中特征部分有简单的柯西型核，剩余的核 $k_{ij}(x,t)$ 在封闭区间 L 和 M 上是有界的。方程组的特征部分是分离的。由前节讨论知道，方程（7.24）和（7.25）的基本解分别是

$$X_1(z) = \prod_1^n [(z-a_k)(z-c_k)]^{-1/2}$$

(7.27)

$$X_2(z) = \prod_1^m [(z-b_k)(z-d_k)]^{-1/2}$$

方程组的解将是下列形式

(7.28) $$g_j(t) = G_j(t)X_j^*(t), \quad j=1,2$$

其中 G_1 和 G_2 是分别定义在 L 和 M 上的有界函数。

由于条件（7.4）和（7.6）被用于微分的形式，再根据上节的论证，很明显，未知函数必须满足下列单值性条件：

(7.29) $$\int_{L_k} g_1(t)dt = 0, \qquad k=1,\cdots,n$$

(7.30) $$\int_{M_k} g_2(t)dt = 0, \qquad k=1,\cdots,m$$

积分方程（7.24）和（7.25）的指数分别是 n 和 m。因此解将带有 $n+m$ 个任意常数（见第 5 章和第 6 章），这些常数可由条件（7.29）和（7.30）确定。未知函数 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 分别定义在 L 和 M 上。当 L 和 M 不相同时，用任一种标准方法或用本分册介绍的数值解法求解方程都不会出现任何困难①。

---

①原注　这种方法对于复合材料力学中更复杂的混合边界值问题的应用，可参见艾多温和格普塔（Gupta）(1971 a）、艾林（Arin）和艾多温（1971）的工作，在壳体中的应用可参见艾多温和拉特瓦里（Ratwani）（1970，1972）的工作。

第 8 章　由对偶积分方程导出第二类奇异积分方程

下面我们研究弹性静力学中比较简单的平面问题。设弹性常数为 μ_i、λ_i（$i=1,2$）的两个弹性半平面，沿着 $y=-h$ 平面粘接着。假设 $x=0$ 是几何对称平面。介质在 $y=0$ 的线上含有一列 $2n$ 个割线 $\overline{L_k}=(-c_k,-a_k)$ 和 $L_k=(a_k,c_k)(k=1,\cdots,n)$，并设割线的表面作用力是已知的。参见图 6，问题可用位移分量 u_i，v_i（$i=1,2,3$）表述如下：

(8.1)　$$\mu_i\nabla^2 u_i+(\lambda_i+\mu_i)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)=0,\quad i=1,2,3$$

(8.2)　$$\mu_i\nabla^2 v_i+(\lambda_i+\mu_i)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)=0,\quad i=1,2,3$$

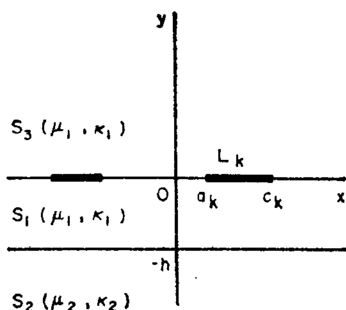


图 6　两个粘接半平面的混合边界值问题

(8.3) $t_{yy}^1(x,-h)=t_{yy}^2(x,-h)$, $-\infty<x<\infty$

(8.4) $t_{xy}^1(x,-h)=t_{xy}^2(x,-h)$, $-\infty<x<\infty$

(8.5) $t_{yy}^3(x,0)=t_{yy}^1(x,0)$, $-\infty<x<\infty$

(8.6)① $t_{xy}^3(x,0)=t_{xy}^1(x,0)$, $-\infty<x<\infty$

(8.7) $u_1(x,-h)=u_2(x,-h)$, $-\infty<x<\infty$

(8.8) $v_1(x,-h)=v_2(x,-h)$, $-\infty<x<\infty$

(8.9) $\lim\limits_{y\to 0^-} t_{yy}^1(x,y)=p_1(x)$, $x\in L+\bar{L}$

(8.10) $\lim\limits_{y\to 0^-} t_{xy}^1(x,y)=p_2(x)$, $x\in L+\bar{L}$

(8.11) $u_3(x,0)-u_1(x,0)=0$, $x\in L'+\bar{L}'$

(8.12) $v_3(x,0)-v_1(x,0)=0$, $x\in L'+\bar{L}'$

(8.13) $L=\sum\limits_{1}^{n} L_k$, $L_k=(a_k,c_k)$, $\bar{L}_k=(-c_k,-a_k)$

其中 p_1 和 p_2 是已知函数，t_{yy}^i、t_{xy}^i（$i=1,2,3$）是应力分量，L' 是 $0\leqslant x<\infty$，$y=0$ 上 L 的余集。因为 L 是有限的以及作用力 p_1 和 p_2 是静力自动平衡的，当 $x^2+y^2\to\infty$ 时位移分量 u_i、v_i（$i=1,2,3$）和它们的导数趋向于零。因为介质的几何对称性，通过把输入函数 p_1 和 p_2 分解为偶函数和奇函数两部分，问题就可以表示为一个对称问题和一个反对

①译注 原文有印刷错误。

称问题的叠加。对于对称问题可以找出它的解。但是不难证明对于两种情况组成的奇异积分方程组是相同的。对于对称问题，外载荷具有下列对称性质：

$$(8.14)\quad p_1(x)=p_1(-x),\quad p_2(x)=-p_2(-x),\quad x\in L+\bar{L}$$

在对称问题中，函数u_i、v_i在右半平面$x>0$可用下列傅里叶积分表示为：

$$(8.15)\quad u_i(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \phi_i(\alpha,y)\sin\alpha x d\alpha,\qquad i=1,2,3$$

$$(8.16)\quad v_i(x,y)=\left(\frac{2}{\pi}\right)\int_0^\infty \psi_i(\alpha,y)\cos\alpha x d\alpha,\qquad i=1,2,3$$

把（8.15）式和（8.16）式代入（8.1）式和（8.2）式，解出未知函数ϕ_i和ψ_i，再代回到（8.15）式和（8.16）式，我们得到

$$(8.17)\quad u_i(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(A_{i1}+yA_{i2})e^{-\alpha y}+(A_{i3}+yA_{i4})e^{\alpha y}]\sin\alpha x d\alpha$$

$$(8.18)\quad v_i(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left\{\left[A_{i1}+\left(\frac{\kappa_i}{\alpha}+y\right)A_{i2}\right]e^{-\alpha y}+\left[-A_{i3}+\left(\frac{\kappa_i}{\alpha}-y\right)A_{i4}\right]e^{\alpha y}\right\}\cos\alpha x d\alpha$$

$$i=1,2,3$$

其中λ_i、μ_i是拉梅（Lamé）常数，$\kappa_i=3-4\nu_i$，ν_i是泊松比，A_{ij}是α的函数，它们可以由边界条件和连续条件确定。由于在$y=\mp\infty$位移的有界性，我们有

$$(8.19)\quad A_{33}=0,\quad A_{34}=0,\quad A_{21}=0,\quad A_{22}=0$$

在$y=0$和$y=-h$上的条件提供了确定其余的$A_{ij}(\alpha)$所需要的八个方程。在求出u_i、v_i以后，应力可由虎克定律得到。应力张量中特别感兴趣的两个分量可表示为

$$(8.20)\quad (1/2\mu_i)\, t_{yy}^i = (2/\pi)\int_0^\infty \Big\{ -\Big[\alpha(A_{i1} + yA_{i2}) + \frac{1}{2}(1+\kappa_i)A_{i2} \Big] e^{-\alpha y} + \Big[-\alpha(A_{i3} + yA_{i4}) + \frac{1}{2}(1+\kappa_i)A_{i4} \Big] e^{\alpha y} \Big\} \cos\alpha x\, d\alpha$$

$$(8.21)\quad (1/2\mu_i)\, t_{xy}^i = (2/\pi)\int_0^\infty \Big\{ -\Big[\alpha(A_{i1} + yA_{i2}) + \frac{1}{2}(\kappa_i - 1)A_{i2} \Big] e^{-\alpha y} + \Big[\alpha(A_{i3} + yA_{i4}) - \frac{1}{2}(\kappa_i - 1)A_{i4} \Big] e^{\alpha y} \Big\} \sin\alpha x\, d\alpha$$

连续条件（8.3）—（8.8）式提供了六个代数方程，它们可用来消去六个未知函数 $A_{ij}(\alpha)$。条件（8.9）—（8.12）式给出一组对偶积分方程用以确定剩下的两个函数。在完成常规运算以后，为了量纲的一致，再将（8.11）式和（8.12）式对 x 求导，我们得到函数 $A_{13}(\alpha)$ 和 $A_{14}(\alpha)$ 的一组对偶积分方程：

$$(8.22)\quad \frac{\partial}{\partial x}(u_3^+ - u_1^-) = -(1+\kappa_1)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Big[\alpha A_{13} - \frac{1}{2}(\kappa_1 - 1)A_{14} \Big] \cos\alpha x\, d\alpha = 0,\ x \in L'$$

$$(8.23)\quad \frac{\partial}{\partial x}(v_3^+ - v_1^-) = -(1+\kappa_1)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\Big[\alpha A_{13} - \frac{1}{2}(\kappa_1+1)A_{14}\Big]\sin\alpha x d\alpha = 0,\ x\in L'$$

$$(8.24)\quad \lim_{y\to 0^-}\int_0^\infty\Big\{\Big[\frac{1-\beta}{1+\beta\kappa_1}(1+2\alpha h)e^{-2\alpha h} - e^{\alpha y}\Big]\alpha A_{13} + \Big[\frac{1}{2}(\kappa_1+1)e^{\alpha y} + \Big(\frac{\kappa_1\beta-\kappa_2}{2(\kappa_2+\beta)} - \frac{\kappa_1(1-\beta)}{2(1+\kappa_1\beta)} - \frac{1-\beta}{2(1+\kappa_1\beta)}(4\alpha^2h^2+2\alpha h(1+\kappa_1))\Big)\times e^{-2\alpha h}\Big]A_{14}\Big\}\cos\alpha x d\alpha = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\mu_1}p_1(x),\quad x\in L$$

$$(8.25)\quad \lim_{y\to 0^-}\int_0^\infty\Big\{\Big[e^{\alpha y} + \frac{1-\beta}{1+\beta\kappa_1}(2\alpha h-1)e^{-2\alpha h}\Big]\alpha A_{13} + \Big[-\frac{1}{2}(\kappa_1-1)e^{\alpha y} + \Big(\frac{\beta\kappa_1-\kappa_2}{2(\kappa_2+\beta)} + \frac{\kappa_1(1-\beta)}{2(1+\beta\kappa_1)} - \frac{1-\beta}{1+\beta\kappa_1}(2\alpha^2h^2+\alpha h(\kappa_1-1))\Big)\times e^{-2\alpha h}\Big]A_{14}\Big\}\sin\alpha x d\alpha = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\mu_1}p_2(x),\quad x\in L$$

其中 $\beta=\mu_2/\mu_1$。现在我们定义下列两个辅助函数：

$$(8.26)\quad f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x}[u_3(x,0^+) - u_1(x,0^-)],\quad 0\leqslant x<\infty$$

$$(8.27)\quad f_2(x) = \frac{\partial}{\partial x}[v_3(x,0^+) - v_1(x,0^-)],\quad 0\leqslant x<\infty$$

利用（8.22）式、（8.23）式、（8.26）式和（8.27）式，

通过f_1，f_2解出A_{13}，A_{14}，然后再代入（8.24）式和（8.25）式，我们得到

$$(8.28)\quad \lim_{y\to 0^-}\int_L f_2(t)dt\int_0^\infty e^{\alpha y}\sin\alpha t\cos\alpha x d\alpha-\int_L f_1(t)\,dt$$

$$\times\int_0^\infty e^{-2\alpha h}\left(a_2+\frac{a_1}{2}-2a_1\alpha^2h^2\right)\cos\alpha t\cos\alpha x d\alpha$$

$$+\int_L f_2(t)\,dt\int_0^\infty e^{-2\alpha h}\left(a_2-\frac{a_1}{2}-2a_1\alpha h-2a_1\alpha^2h^2\right)$$

$$\times\sin\alpha t\cos\alpha x d\alpha=\frac{\pi}{2}\frac{1+\kappa_1}{2\mu_1}p_1(x),\qquad x\in L$$

$$(8.29)\quad -\lim_{y\to 0^-}\int_L f_1(t)dt\int_0^\infty e^{\alpha y}\cos\alpha t\sin\alpha x d\alpha-\int_L f_1(t)dt$$

$$\times\int_0^\infty e^{-2\alpha h}\left(a_2-\frac{a_1}{2}+2a_1\alpha h-2a_1\alpha^2h^2\right)\cos\alpha t\sin\alpha x d\alpha$$

$$+\int_L f_2(t)dt\int_0^\infty e^{-2\alpha h}\left(a_2+\frac{a_1}{2}-2a_1\alpha^2h^2\right)$$

$$\times\sin\alpha t\sin\alpha x d\alpha=\frac{\pi}{2}\frac{1+\kappa_1}{2\mu_1}p_2(x),\qquad x\in L$$

其中

$$(8.30)\quad a_1=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\kappa_1\mu_2},\qquad a_2=\frac{\kappa_1\mu_2-\kappa_2\mu_1}{2(\mu_2+\kappa_2\mu_1)}$$

在（8.28）式和（8.29）式左边的第二项和第三项中，因为里面的积分一致收敛，极限已经取到积分号内了。

考虑到f_1和f_2的对称性质，即$f_1(x)=f_1(-x)$，$f_2(x)=-f_2(-x)$，算出积分，然后取极限，（8.28）式和（8.29）式可以被写成

$$(8.31)\quad \frac{1}{\pi}\int_{L+\bar{L}}\frac{f_1(t)}{t-x}dt+\int_{L+\bar{L}}k_{11}(x,t)f_1(t)dt$$

$$+\int_{L+\bar{L}}k_{12}(x,t)f_2(t)dt=\frac{1+\kappa_1}{2\mu_1}p_2(x)$$

$$x\in L+\bar{L}$$

$$(8.32)\quad \frac{1}{\pi}\int_{L+\bar{L}}\frac{f_2(t)}{t-x}dt+\int_{L+\bar{L}}k_{21}(x,t)f_1(t)dt$$

$$+\int_{L+\bar{L}}k_{22}(x,t)f_2(t)dt=\frac{1+\kappa_1}{2\mu_1}p_1(x)$$

$$x\in L+\bar{L}$$

$$(8.33)\quad k_{11}(x,t)=-\frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{a_1}{2}-a_2\right)\frac{t-x}{(t-x)^2+4h^2}-\frac{8a_1h^2(t-x)}{[(t-x)^2+4h^2]^2}+\frac{4a_1h^2[12h^2(t-x)-(t-x)^3]}{[(t-x)^2+4h^2]^3}\right\}$$

$$(8.34)\quad k_{12}(x,t)=-k_{21}(x,t)=\frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{a_1}{2}+a_2\right)\frac{2h}{(t-x)^2+4h^2}-\frac{8a_1h^3[4h^2-3(t-x)^2]}{[(t-x)^2+4h^2]^3}\right\}$$

$$(8.35)\quad k_{22}(x,t)=-\frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{a_1}{2}-a_2\right)\frac{t-x}{(t-x)^2+4h^2}+\frac{8a_1h^2(t-x)}{[(t-x)^2+4h^2]^2}+\frac{4a_1h^2[12h^2(t-x)-(t-x)^3]}{[(t-x)^2+4h^2]^3}\right\}$$

方程（8.31）和（8.32）提供了确定未知函数f_1和f_2的奇

异积分方程组。

(8.22) 式和 (8.23) 式表示 L' 上位移导数的连续性而不是位移的连续性。因此，积分方程组 (8.31) 和 (8.32) 的解还必须遵守下列单值性条件：

$$(8.36)\quad \int_{L_k} f_i(t)dt = 0, \qquad \int_{\overline{L}_k} f_i(t)dt = 0$$

$$i = 1, 2,\ k = 1, \cdots, n$$

$h \to \infty$ 时可看出 $k_{ij} \to 0$，(8.31) 式和 (8.32) 式分解并简化为无穷平面上的积分方程，该无穷平面上有一列共线的割线。对于 $h > 0$，(8.31) 式和 (8.32) 式类似于前一章中介绍的第一类奇异积分方程组。$h = 0$ 的情况在这里是特别有兴趣的。当 $h \to 0$ 时能够证明(见艾多温 1968)，由 (8.33)—(8.35) 式给出的 k_{ij} 中仅仅只有第一项将提供核，而其余各项将趋近于零。利用下两式

$$(8.37)\quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{L+\overline{L}} \frac{t-x}{(t-x)^2 + 4h^2} f_i(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{L+\overline{L}} \frac{f_i(t)}{t-x}dt$$

$$(8.38)\quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{L+\overline{L}} \frac{2hf_i(t)}{(t-x)^2 + 4h^2}dt = f_i(x)$$

$h = 0$ 的奇异积分方程组则变成

$$(8.39)\quad \frac{1}{\pi}\int_{L+\overline{L}} \frac{f_1(t)}{t-x}dt + \gamma f_2(x) = \frac{1}{2\mu_0} p_2(x),\quad x \in L + \overline{L}$$

$$(8.40)\quad \frac{1}{\pi}\int_{L+\overline{L}} \frac{f_2(t)}{t-x}dt - \gamma f_1(x) = \frac{1}{2\mu_0} p_1(x),\quad x \in L + \overline{L}$$

$$\gamma = \frac{\mu_2(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_2 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}$$

$$\mu_0 = \frac{\mu_1}{1+\kappa_1} \cdot \frac{1}{1+a_2-a_1/2}$$

这就是有名的关于两个粘接半平面含有一列分界面裂纹的奇异积分方程组。方程（8.39）和（8.40）中的未知函数f_1和f_2为

(8.41) $$f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x}[u_3(x,0^+) - u_2(x,0^-)]$$

(8.42) $$f_2(x) = -\frac{\partial}{\partial x}[v_3(x,0^+) - v_2(x,0^-)]$$

求解（8.31）和（8.32）形式的积分方程组的方法将在本分册的后面讨论。另一方面，方程组（8.39）和（8.40）仅由特征部分组成，有着封闭形式的解。要得到这个解，我们定义下列函数：

(8.43) $$\phi(t) = f_1(t) + i f_2(t)$$

(8.44) $$p(x) = (p_1 - i p_2)/2\mu_0$$

把（8.39）式和（8.40）式联立起来得到

(8.45) $$\frac{1}{\pi i}\int_{L+\bar{L}} \frac{\phi(t)dt}{t-x} - \gamma\phi(x) = p(x), \qquad x \in L - \bar{L}$$

我们定义下列$z = x + iy$的分段全纯函数：

(8.46) $$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L+\bar{L}} \frac{\phi(t)dt}{t-z}$$

对于$F(z)$这个函数，普利麦吉公式可写为（见穆斯海里什维里，1953 a）

(8.47) $$F^+(t) - F^-(t) = \phi(t)$$

(8.48) $$F^+(t) + F^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{L+\bar{L}} \frac{\phi(x)dx}{x-t}$$

利用（8.47）式和（8.48）式，则（8.45）式可表示为下列黎曼-希尔伯特问题：

$$F^{+}(x)+\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)F^{-}(x)=\frac{p(x)}{1-\gamma},\qquad x\in L+\overline{L} \tag{8.49}$$

该问题的基本解为

$$X(z)=\prod_{1}^{n}(z^{2}-a_{k}{}^{2})^{-1/2}(z^{2}-c_{k}{}^{2})^{-1/2}$$

$$\times\left[\frac{(z-a_{k})(z+c_{k})}{(z+a_{k})(z-c_{k})}\right]^{i\beta_{0}} \tag{8.50}$$

$$\beta_{0}=\frac{1}{2\pi}\ln\left[\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right]$$

这里研究的是 $\lim\limits_{|z|\to\infty} z^{2n}X(z)=1$ 的 X 的分支。因为 X 是齐次黎曼-希尔伯特问题的解，它的边界值用下列式子相互连系着

$$X^{+}(x)=-[(1+\gamma)/(1-\gamma)]X^{-}(x),\qquad x\in L+\overline{L} \tag{8.51}$$

$$X^{+}(x)=X^{-}(x),\qquad x\in L'+\overline{L'} \tag{8.52}$$

问题的指数为 $2n$。利用 (8.51) 式和(8.52)式，黎曼-希尔伯特问题 (8.49) 的在无穷远处等于零的解可求出为（见第 4 章）

$$F(z)=\frac{X(z)}{1-\gamma}\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\overline{L}}\frac{p(t)dt}{(t-z)X^{+}(t)}$$

$$+\sum_{0}^{2n-1}A_{k}z^{k}X(z) \tag{8.53}$$

上式中的任意复数常数 $A_{k}(k=0,\ \cdots,\ 2n-1)$ 可由单值性条件 (8.36) 确定，(8.36) 式可改写成

$$\int_{L_{k}}\phi(t)dt=0,\qquad \int_{\overline{L}_{k}}\phi(t)dt=0,\qquad k=1,\cdots,n \tag{8.54}$$

例如，在一条割线 $L+\overline{L}=(-1,\ 1)$上受到均匀压力p_{0}

的特殊情况下，即

$$p(x)=\frac{p_1-ip_2}{2\mu_0}=-\frac{p_0}{2\mu_0} \tag{8.55}$$

我们得到

$$\begin{aligned}F(z)&=A_0X(z)+(p_0/4\mu_0)[(z-2i\beta_0)X(z)-1]\\X(z)&=[(z+1)/(z-1)]^{i\beta_0}(z^2-1)^{-1/2}\end{aligned} \tag{8.56}$$

确定 A_0 以后，由（8.47）式得到

$$\begin{aligned}\phi(t)=f_1(t)+if_2(t)=&[p_0/2\mu_0(1+\gamma)]\\&\times(t-2i\beta_0)X(t),\quad |t|<1\end{aligned} \tag{8.57}$$

这儿我们要指出，（8.39）式和（8.38）式或（8.45）式对于 $x\in L'+\overline{L'}$ 像 $x\in L+\overline{L}$ 一样也是成立的，它们可用来计算 $L'+\overline{L'}$ 上的接触应力。于是，由（8.49）式、（8.56）式和（8.44）式得到在 $y=0$，$x\in L'+\overline{L'}$ 上接触应力为

$$\begin{aligned}t^3_{yy}-it^3_{xy}&=t^2_{yy}-it^2_{xy}=4\mu_0F(t)\\&=p_0[(t-2i\beta_0)X(t)-1],\quad |t|>1\end{aligned} \tag{8.58}$$

或

$$\begin{aligned}t^2_{yy}-it^2_{xy}&=[p_0(t-2i\beta_0)/(t^2-1)^{1/2}]\\&\quad\times[\cos\tau+i\sin\tau]-p_0\\\tau&=\beta_0\ln[(t+1)/(t-1)],\quad |t|>1\end{aligned} \tag{8.59}$$

本章介绍的方法对于固体力学的更复杂问题中所出现的对偶积分方程的进一步应用可参见艾多温和奥兹伯克（1969）、奥兹伯克和艾多温（1969）、艾多温和格普塔（1971 a，b）的工作。第二类奇异积分方程的理论在穆斯海里什维里（1953 a）的著作中有详尽的介绍，它的应用可在穆斯海里什维里（1953 b）和加林〔（Galin），1953〕的著作中找到。

在下列更加一般形式的对偶积分方程组中

$$(8.60)\quad \lim_{y\to 0+}\int_0^\infty \sum_1^2 a_{ij}(\alpha,y)A_j(\alpha)k_i(\alpha,x)d\alpha = f_i(x)$$

$$x\in L,\qquad i=1,2$$

$$(8.61)\quad u_i(x)=(2/\pi)\int_0^\infty A_i(\alpha)k_i(\alpha,x)d\alpha = 0$$

$$x\in L',\qquad i=1,2$$

$$k_1=\cos\alpha x,\qquad k_2=\sin\alpha x$$

假设输入函数 f_i 和辅助函数 u_i 具有相同的物理量纲，求出(8.61)式的反变换并代入(8.60)式，我们得到

$$(8.62)\quad \lim_{y\to 0+}\int_L \sum_1^2 u_j(t)dt\int_0^\infty a_{ij}(\alpha,y)k_i(\alpha,x)k_j(\alpha,t)d\alpha$$

$$=f_i(x),\qquad x\in L,\qquad i=1,2$$

要分离出可能的奇异项，必须考察权函数 $a_{ij}(\alpha,y)$ 对于 α 的大值（和 y 的小值）的渐近性质。设 $a_{ij}^\infty(\alpha,y)$ 表示 $a_{ij}(\alpha,y)$ 对于大的 α 值渐近展开式中的首项。在物理问题中，a_{ij}^∞ 通常是这样的形式

$$(8.63)\qquad a_{ij}^\infty(\alpha,y)=d_{ij}e^{-\alpha y},\qquad i,j=1,2$$

其中 d_{ij} 是个常数(它可以为零)。根据(8.63)式，则(8.62)式能修改成

$$(8.64)\quad \lim_{y\to 0+}\int_L \sum_1^2 u_j(t)dt\int_0^\infty d_{ij}e^{-\alpha y}k_i(\alpha,x)k_j(\alpha,t)d\alpha$$

$$+\int_L \sum_1^2 u_j(t)dt\int_0^\infty [a_{ij}(\alpha,0)-d_{ij}]k_i(\alpha,x)$$

$$\times k_j(\alpha,t)d\alpha=f_i(x), \qquad x\in L, \quad i=1,2$$

在上式第二项中因为一致收敛，极限被放到积分号里面去了。在(8.64)式中，里面的积分对于闭区间$L_k(k=1,\cdots,n, L=\sum_1^n L_k)$内所有的$x$和$t$都是有界的。设

$$(8.65)\qquad K_{ij}(x,t)=\int_0^\infty [a_{ij}(\alpha,0)-d_{ij}]k_i(\alpha,x)k_j(\alpha,t)d\alpha$$

在第一项中，里面积分可计算出为

$$(8.66)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha y}\cos\alpha x\sin\alpha t d\alpha=\frac{1}{2}\left[\frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}+\frac{t+x}{(t+x)^2+y^2}\right]$$

$$(8.67)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha y}\cos\alpha x\cos\alpha t d\alpha=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{(t-x)^2+y^2}+\frac{y}{(t+x)^2+y^2}\right]$$

$$(8.68)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha y}\sin\alpha x\sin\alpha t d\alpha=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{(t-x)^2+y^2}-\frac{y}{(t+x)^2+y^2}\right]$$

把上述结果代入(8.64)式的第一项，取极限，并定义下列奇异核，则我们得到

$$s_{11}(x,t)=s_{22}(x,t)=\frac{\pi}{2}\delta(t-x)$$

$$(8.69)\qquad s_{12}(x,t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)$$

$$s_{21}(x,t)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t+x}\right)$$

$$
(8.70) \quad \sum_{1}^{2} \int_L [d_{ij} s_{ij}(x,t) + K_{ij}(x,t)] u_j(t) dt = f_i(x)
$$

$$
x \in L, \quad i = 1, 2
$$

假使有关的积分变换是汉克尔（Hankel）变换。（例如，在用平行平面限定的区域中轴对称的混合边界值问题），核 $k_i(\alpha, x)$ 是 $J_n(\alpha x)$。在这样的情况下，把对偶积分方程组简化为奇异积分方程组的方法几乎与本章中介绍的方法相同（见艾多温，1966；艾林和艾多温，1971）。

第 9 章　对偶级数-积分方程组

前面几章我们讨论的问题都是这样的类型，即它们的混合边界条件不是在一个有限范围就是在一个无限范围内给出。因此，利用特征函数展开式或积分变换，问题可以通过一组对偶级数方程或一组对偶积分方程表述出来。在某些问题中，既含有对偶级数方程又含有对偶积分方程。在这一章里我们将讨论通过一组对偶级数-积分方程表述出来的混合边界值问题。然后将这组方程化简为一个奇异积分方程。这个问题还可以作为应用上章所述方法的一个例子，这种方法就是通过渐近分析分离出核的奇异部分来。

研究一根无限长的弹性轴扭转问题，这根轴联接（或冷缩配合）在具有不同弹性常数的宽度为有限的弹性圆盘上。见图 7，设 $x=0$ 是几何对称面，所有的外载荷沿着 θ 方向以轴对称的方式作用着。设 $u_1(r,x)$ 和 $u_2(r,x)$ 分别为轴和圆盘的位移向量的 θ 方向分量。暂不管两种材料之间的结合

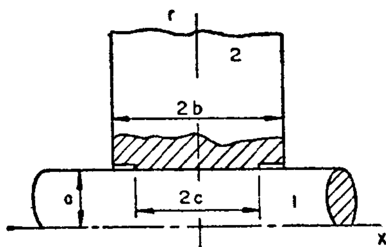


图 7　被固接在不同材料的圆盘上的圆柱体之扭转

问题，假设圆盘和圆轴在外力作用下的扭转问题已经分别被解出。设$u_i^0(r,x)(i=1,2)$是对应于这些解的位移，并记

$$(9.1)\qquad f(x)=-\frac{\partial}{\partial x}[u_2^0(a+0,x)-u_1^0(a-0,x)]\qquad -c<x<c$$

于是最后的解将是$u_i^0+u_i$ $(i=1,2)$，其中u_1和u_2是由下列微分方程和边界条件、连续性条件得到的位移：

$$(9.2)\qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_i}{\partial r}-\frac{u_i}{r^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}=0,\qquad i=1,\quad r<a;\quad i=2,\quad r>a$$

$$(9.3)\qquad t_{\theta x}^2(r,\ \mp b)=0,\qquad r>a$$

$$(9.4)\qquad t_{r\theta}^1(a,x)=0,\qquad |x|>c$$

$$(9.5)\qquad t_{r\theta}^2(a,x)=0,\qquad c<|x|<b$$

$$(9.6)\qquad \frac{\partial}{\partial x}[u_2(a+0,x)-u_1(a-0,x)]=f(x),\qquad -c<x<c$$

$$(9.7)\qquad t_{r\theta}^1(a,x)=t_{r\theta}^2(a,x)=p(x),\qquad -c<x<c$$

$$(9.8)\qquad \int_{-c}^{c}2\pi a^2 p(x)dx=C$$

在把问题公式化中假设接触面的轴向长度$2c$小于圆盘的宽度$2b$，$c=b$是特殊的极限情况。这里$f(x)$是已知的输入函数，$p(x)$是（未知的）分界面上的切应力，C是圆轴传递给圆盘的扭矩。应力向量的两个不等于零的分量为

(9.9) $$t_{r\theta}^{i}=\mu_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial r}-\frac{u_i}{r}\right),\qquad t_{\theta x}^{i}=\mu_i\frac{\partial u_i}{\partial x},\qquad i=1,2$$

其中 μ_1 和 μ_2 分别为圆轴和圆盘的剪切模量。

因为 $x=0$ 是几何对称平面，记

(9.10) $$\begin{aligned} f(x)&=f_1(x)+f_2(x)\\ f_1(x)&=[f(x)-f(-x)]/2,\\ f_2(x)&=[f(x)+f(-x)]/2 \end{aligned}$$

解可以表示为对称解与反对称解之和，对称解 $u_i(r,x)=u_i(r,-x)(i=1,2)$，$p(x)=p(-x)$。由(9.1)式—(9.8)式利用输入函数 $f_1(x)$ 和 C 而得到，反对称解 $u_i(r,x)=-u_i(r,-x)(i=1,2)$，$p(x)=-p(-x)$则是利用输入函数 $f_2(t)$ 及 $C=0$ 而得到的。

对于圆轴和圆盘分别满足在 $r=0$ 和 $r=\infty$ 正则条件的方程 (9.2) 的解可表示为

(9.11) $$u_1(r,x)=(2/\pi)\int_0^\infty A(\alpha)I_1(\alpha r)\begin{cases}\cos\\ \sin\end{cases}(\alpha x)d\alpha$$

(9.12) $$u_2(r,x)=\sum_1^\infty B_nK_1(\alpha_n r)\begin{cases}\cos\\ \sin\end{cases}(\alpha_n x)$$①

其中函数 $A(\alpha)$和常数 B_n 都是未知的，余弦核和正弦核分别对应于对称问题和反对称问题。由 (9.3) 式、(9.9) 式和 (9.12) 式我们得到

(9.13) $$\alpha_n=\begin{cases}\pi n/b, & (\text{对称问题})\quad n=1,2,\cdots\\ (2n-1)\pi/2b, & (\text{反对称问题})\quad n=1,2,\cdots\end{cases}$$

---

①校注 I_1 和 K_1 分别为序 1 的第一类和第二类修正贝塞尔函数。

根据(9.11)式、(9.12)式及 (9.9) 式，边界条件(9.4)—(9.7) 可以表示为

$$(9.14)\qquad \lim_{r\to a+0}\sum_{1}^{\infty}B_n\alpha_nK_1(\alpha_nr)\left\{\begin{matrix}-\sin\alpha_nx\\ \cos\alpha_nx\end{matrix}\right\}$$

$$-\lim_{r\to a-0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}A(\alpha)\alpha I_1(\alpha r)\left\{\begin{matrix}-\sin\alpha x\\ \cos\alpha x\end{matrix}\right\}d\alpha=\left\{\begin{matrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{matrix}\right.$$

$$|x|<c$$

$$(9.15)\qquad \frac{2\mu_1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\alpha)\alpha I_2(\alpha a)\left\{\begin{matrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{matrix}\right\}d\alpha$$

$$=-\mu_2\sum_{1}^{\infty}B_n\alpha_nK_2(\alpha_na)\left\{\begin{matrix}\cos\alpha_nx\\ \sin\alpha_nx\end{matrix}\right\}=p(x)$$

$$|x|<c$$

$$(9.16)\qquad \frac{2\mu_1}{\pi}\int_0^{\infty}A(\alpha)\alpha I_2(\alpha a)\left\{\begin{matrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{matrix}\right\}d\alpha=0,\qquad |x|>c$$

$$(9.17)\qquad -\mu_2\sum_{1}^{\infty}B_n\alpha_nK_2(\alpha_na)\left\{\begin{matrix}\cos\alpha_nx\\ \sin\alpha_nx\end{matrix}\right\}=0,\qquad c<|x|<b$$

对偶级数-积分方程 (9.14)—(9.17) 可以很容易地被简化为未知函数 $p(x)$ 的奇异积分方程。首先由 (9.15)—(9.17) 式我们得到

$$(9.18)\qquad \alpha A(\alpha)\quad \frac{1}{\mu_1I_2(\alpha a)}\int_0^{c}p(t)\left\{\begin{matrix}\cos\alpha t\\ \sin\alpha t\end{matrix}\right\}dt$$

$$(9.19)\qquad \alpha_nB_n=-\frac{2}{b\mu_2K_2(\alpha_na)}\int_0^{c}p(t)\left\{\begin{matrix}\cos\alpha_nt\\ \sin\alpha_nt\end{matrix}\right\}dt$$

于是，把 (9.18) 式、(9.19) 式代入 (9.14) 式，并利用

$p(t)$的对称性质，我们得到

$$(9.20)\quad \lim_{r\to a+0}\frac{1}{b\mu_2}\int_{-c}^{c}p(t)dt\sum_{1}^{\infty}\frac{K_1(\alpha_n r)}{K_2(\alpha_n a)}\sin\alpha_n(t-x)$$

$$+\lim_{r\to a-0}\frac{1}{\pi\mu_1}\int_{-c}^{c}p(t)dt\int_{0}^{\infty}\frac{I_1(\alpha r)}{I_2(\alpha a)}\sin\alpha(t-x)d\alpha$$

$$=\begin{cases}-f_1(x), & \\ & |x|<c\\ -f_2(x), & \end{cases}$$

对于上式中出现的α_n，(9.13) 式仍然有效。

对于$t=x$在 (9.20) 式中的核是发散的。为了分离出核的奇异部分，在 (9.20) 式的第一项我们设$r=a+\varepsilon$，在第二项设$r=a-\varepsilon$，其中ε是一个小的正常数，注意，对于大的α和α_n值，权函数有下列渐近性质：

$$(9.21)\quad \begin{aligned}&K_1(\alpha_n a+\alpha_n\varepsilon)/K_2(\alpha_n a)\simeq e^{-\alpha_n\varepsilon},\\&I_1(\alpha a-\alpha\varepsilon)/I_2(\alpha a)\simeq e^{-\alpha\varepsilon}\end{aligned}$$

我们把 (9.21) 式与 (9.20) 式中的被积函数相加、相减，利用下列关系式计算出奇异核：

$$(9.22)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-c}^{c}p(t)dt\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\varepsilon}\sin\alpha(t-x)d\alpha$$

$$=\int_{-c}^{c}p(t)/(t-x)dt$$

$$(9.23)\quad \sum_{1}^{\infty}e^{-\beta n}\sin\lambda n=\sin\lambda/[2(ch\,\beta-\cos\lambda)]$$

利用 (9.22) 式和 (9.23) 式，则 (9.20) 式可表示为

$$(9.24)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{p(t)}{t-x}dt+\frac{\mu_1}{2b\mu_2}$$

$$\times\int_{-c}^{c} p(t)\begin{Bmatrix} \operatorname{ctg}\,(\pi(t-x)/2b) \\ \csc\,(\pi(t-x)/2b) \end{Bmatrix} dt$$

$$+\int_{-c}^{c} p(t)k(t,x)\,dt = \begin{cases} -\mu_1 f_1(x), \\ -\mu_1 f_2(x), \end{cases} \qquad |x|<c$$

$$k(t,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{I_1(\alpha a)}{I_2(\alpha a)}-1\right)\sin\alpha(t-x)\,d\alpha \tag{9.25}$$

$$+\frac{\mu_1}{b\mu_2}\sum_1^{\infty}\left(\frac{K_1(\alpha_n a)}{K_2(\alpha_n a)}-1\right)\sin\alpha_n(t-x)$$

上式给出的核对于闭区间$[-c,c]$上的所有t和x都是有界的，由于是一致收敛，极限可以放进积分号和求和号里面。

对于$b>c$，(9.24) 式第二项的核有一个$1/(t-x)$形式的奇异性，因此 (9.24) 式是前几章已经讨论过的简单奇异积分方程。在$c=b$的极限情况下，(9.24) 式第二项的核在$t-x=\mp 2c$像$t=x$一样是无界的。于是，分离出奇异部分，这些核可以表示成

$$\frac{1}{2c}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2c}(t-x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1}{t-z_1}+\frac{1}{t-z_2}\right)+k_1(x,t)$$

(9.26)

$$\frac{1}{2c}\csc\frac{\pi}{2c}(t-x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{t+x}-\frac{1}{t-z_1}-\frac{1}{t-z_2}\right)+k_2(x,t)$$

$$z_1=x-2c,\qquad z_2=x+2c,\qquad -3c<z_1<-c,\quad c<z_2<3c$$

其中k_1和k_2在闭区间$[-c,\ c]$内是有界的。把 (9.26) 式

代入（9.24）式，对称问题的积分方程则变为

$$(9.27)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c} p(t)\left(\frac{1}{t-x}+\frac{\lambda}{t-z_1}+\frac{\lambda}{t-z_2}\right)dt = F(x)$$

$$-c<x<c$$

其中 $\lambda=\mu_1/(\mu_1+\mu_2)$，

$$F(x) = -\lambda\mu_2 f_1(x) - \lambda\int_{-c}^{c}\left[\frac{\mu_2}{\mu_1}k(x,t)+k_1(x,t)\right]p(t)dt$$

因为 k 和 k_1 是有界的，p 是可积的，所以 $F(x)$ 在闭区间 $[-c,c]$ 上是有界函数。

现在我们假设，$p(t)$ 在 $t=\mp c$ 有可积奇异性，它能表示为（见穆斯海里什维里，1953a，第四章）：

$$(9.28)\quad p(t)=\frac{g(t)}{(c^2-t^2)^\gamma}=\frac{g(t)e^{\pi i\gamma}}{(t-c)^\gamma(t+c)^\gamma},\qquad |t|<c$$

其中 $\gamma=\alpha+i\beta$，$0<\alpha<1$，$g(t)$ 在闭区间 $-c\leqslant t\leqslant c$ 上满足赫尔德（Hölder）条件，$(t^2-c^2)^\gamma$ 是在 $-c<t<c$ 上连续变化的任一确定的分枝。研究下列分段全纯函数：

$$(9.29)\quad \phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{p(t)}{t-z}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{g(t)e^{\pi i\gamma}dt}{(t-c)^\gamma(t+c)^\gamma(t-z)}$$

根据穆斯海里什维里的著作（1953 a，第四章），考查了 $\phi(z)$ 在端点 $\mp c$ 近傍的奇异性质以后，它可以表示为

$$(9.30)\quad \phi(z)=\frac{g(-c)}{(2c)^\gamma}\frac{e^{\pi i\gamma}}{\sin\pi\gamma}\frac{1}{(z+c)^\gamma}$$

$$-\frac{g(c)}{(2c)^\gamma\sin\pi\gamma}\frac{1}{(z-c)^\gamma}+\phi_0(z)$$

除了端点$\mp c$外，函数$\phi_0(z)$在其余各点都是有界的，它在端点附近具有下列性质：

(9.31) $|\phi_0(z)|<C_k/|z-c_k|^{\alpha_0}$ ， $k=1,2$， $\alpha_0<\alpha$， $c_k=\mp c$

其中C_k和α_0是实常数。特别地，对于$z=x$，$-c<x<c$，我们有

$$(9.32)\quad \phi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{p(t)dt}{t-x}$$

$$=\frac{g(-c)}{(2c)^{\gamma}}\frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{(x+c)^{\gamma}}-\frac{g(c)}{(2c)^{\gamma}}\frac{e^{\pi i\gamma}\operatorname{ctg}\pi\gamma}{(x-c)^{\gamma}}$$

$$+\phi^*(x),\qquad -c<x<c$$

在端点附近，$\phi^*(x)$为

$$(9.33)\quad \phi^*(x)=\phi_k^{**}(x)/|x-c_k|^{\alpha_0}\ ,\qquad k=1,2,\quad \alpha_0<\alpha$$

$$c_k=\mp c$$

其中$\phi_k^{**}(x)(k=1,2)$在端点$x=\mp c$及其近傍满足赫尔德条件。

注意，点z_1和点z_2位于割线$-c<x<c$之外。因此，在z_1和z_2点，$\phi(z)$是全纯的，可以表示为

$$(9.34)\quad \phi(z_1)=\frac{g(-c)}{(2c)^{\gamma}}\frac{e^{\pi i\gamma}}{\sin\pi\gamma}\frac{1}{(z_1+c)^{\gamma}}+\phi_1(z_1)$$

$$=\frac{g(-c)}{(2c)^{\gamma}}\frac{1}{\sin\pi\gamma}\frac{1}{(c-x)^{\gamma}}+\phi_1(x-2c)$$

$$(9.35)\quad \phi(z_2)=-\frac{g(c)}{(2c)^{\gamma}}\frac{1}{\sin\pi\gamma}\frac{1}{(z_2-c)^{\gamma}}+\phi_2(z_2)$$

$$=-\frac{g(c)}{(2c)^{\gamma}}\frac{1}{\sin\pi\gamma}\frac{1}{(c+x)^{\gamma}}+\phi_2(x+2c)$$

函数ϕ_1在$z_1=-c$近傍的性质与函数ϕ_2在$z_2=c$近傍的性

质由（9.31）式给出，在割线的其余各点ϕ_1和ϕ_2是有界的。

将（9.29）式、（9.32）式、（9.34）式及（9.35）式代入（9.27）式，我们得到

$$
\begin{aligned}
(9.36)\quad & \frac{g(-c)}{(2c)^\gamma}\frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{(c+x)^\gamma}-\frac{g(c)}{(2c)^\gamma}\frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{(c-x)^\gamma}+\phi^*(x) \\
& +\lambda\frac{g(-c)}{(2c)^\gamma}\frac{1}{\sin\pi\gamma}\frac{1}{(c-x)^\gamma}+\lambda\phi_1(x-2c) \\
& -\lambda\frac{g(c)}{(2c)^\gamma}\frac{1}{\sin\pi\gamma}\frac{1}{(c+x)^\gamma}+\lambda\phi_2(x+2c) \\
& =F(x),\qquad |x|<c
\end{aligned}
$$

这里我们想起(9.27)式是表示对称问题的,即$p(t)=p(-t)$，或$g(t)=g(-t)$。利用对称的性质并注意到在$t=\mp c$点，$g(t)\neq 0$，由（9.36）式首先乘以$(c+x)^\gamma$，再将$x=-c$代进去，然后乘以$(c-x)^\gamma$，将$x=c$代进去，我们得到

$$\frac{g(c)}{(2c)^\gamma}\left(\operatorname{ctg}\pi\gamma-\frac{\lambda}{\sin\pi\gamma}\right)=0$$

或

$$(9.37)\qquad \cos\pi\gamma=\lambda$$

由(9.37)式看出，奇异性γ的幂是个实常数。指定$0<\gamma<\frac{1}{2}$时，λ的范围是$0<\lambda=\mu_1/(\mu_1+\mu_2)<1$。有名的极限情况是$\mu_2/\mu_1=\infty$时，$\gamma=1/2$以及$\mu_2/\mu_1=0$时，$\gamma=0$。

在反对称问题中，由(9.24)式和(9.26)式得到，(9.27)式和(9.36)式左边λ的符号将是负的，右边将用另外的有界函数所代替。可是，在这种情况下$p(t)=-p(-t)$或$g(c)=-g(-c)$，仍然指定(9.37)式作为γ的特征方程。如果$b>c$，

余切核和余割核仅有的奇异部分为 $1/\pi(t-x)$。作为一个结论，在对称问题和反对称问题中，积分方程（9.27）的特征部分将仅有简单的柯西核 $1/(t-x)$。在这种情况下，根据（9.27）—（9.37）式的分析，代替（9.37）式，我们得到 γ 的特征方程

$$(9.38) \qquad \operatorname{ctg} \pi\gamma = 0, \qquad \gamma = \frac{1}{2}$$

这是一个著名的结论（见第 4 章）。

对于 $c=b$ 可以看出，由（9.27）式给出的奇异积分方程的特征部分并没有标准的柯西型奇异项。在这种情况下，解的基本函数（*fundamental function*）为

$$(9.39) \qquad w(x) = (c^2 - x^2)^{-\gamma}$$

其中实常数 γ 是参数 λ 的函数，而 λ 出现在特征核的附加项中〔见（9.27）式和（9.37）式〕。这是特殊情况的一大类奇异积分方程，我们将在下章讨论。

第 10 章　具有广义柯西核的奇异积分方程

通过变量变换并利用对称条件 $p(t)=p(-t)$，(9.27) 式可以表示为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}p(t)\left(\frac{1}{t-x}-\frac{\lambda}{t+x-2c}-\frac{\lambda}{t+x+2c}\right)dt = F(x), \qquad |x|<c \tag{10.1}$$

(9.27) 式给出了上章所讨论的对称问题的奇异积分方程的特征部分。(10.1) 式中特征核的主要特性是，除了柯西型奇异性 $1/(t-x)$ 外，它还含有这些项，当 t 和 x 同时趋向于端点 $\mp c$ 时这些项将是无界的。(10.1) 式是一般类型奇异积分方程中的一种特殊情况，这类奇异积分方程具有下列形式的特征部分：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\Big\{\frac{c_0}{t-x}&+\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=1}^{J}c_{kj}(x-a)^k\frac{d^k}{dx^k}\Big[(t-a)\\&-(x-a)e^{i\theta_j}\Big]^{-1}+\sum_{r=0}^{R}\sum_{s=1}^{S}d_{rs}(b-x)^r\\&\times\frac{d^r}{dx^r}\Big[(t-b)-(b-x)e^{i\omega_s}\Big]^{-1}\Big\}f(t)dt=F(x)\end{aligned} \tag{10.2}$$

$$a<x<b,\quad 0<\theta_j<2\pi,\quad j=1,\cdots,J$$
$$-\pi<\omega_s<\pi,\quad s=1,\cdots,S$$

为了简单起见，假设ab是实轴的一部分，c_0、$c_{\lambda j}$和d_{rs}是已知的常数，$F(x)$或者是一个满足赫尔德条件的已知函数，或者除了已知函数外，它还包含具有弗雷德霍姆核的积分方程的一部分。(10.2) 式左边给出的核称为**广义柯西核**。这个核中的第一项有一个简单的柯西型奇异性。第二组中的项对于开区间 (a, b) 中的x和t的所有值都是有界的，当x和t同时趋向于端点a时它们趋向无穷大。类似地，第三组中的项在开区间 (a, b) 中是有界的，而当x和t同时趋向于端点b时则是无界的。(10.1)式给出的特征核可以从(10.2)式中仅保留三项$c_0=1$，$c_{01}=-\lambda$（取$\theta_1=\pi$），$d_{01}=-\lambda$（取$\omega_1=0$）而得到。$c_0\neq0$，$c_{kj}\neq0$ $(k=0,1,2)$，$\theta_j=\pi$和$d_{rs}=0$的核在这样的混合边界值问题中可以遇到，即含有裂纹的非均匀介质的混合边界值问题，而裂纹端点终止在两种材料的分界面上。$c_0=0, \theta_j=\mp\pi/2$〔例如，对$a=0$的核$t/(t^2+x^2)$和$x/(t^2+x^2)$，$t>0$，$x>0$〕的情况在四分之一平面的混合边界值问题的公式中出现。积分方程 (10.2) 的一种特殊情况最近被比克纳 (Bueckner，1966) 和比尔曼 (Bierman，1971)用函数论方法解决了。在这一章我们要研究方程(10.2)的解在端点附近的奇异性，并找出基本解。积分方程的数值解法将在13章中讨论。

根据穆斯海里什维里 (1953 a) 的有关结果，设(10.2)式中的未知函数$f(t)$在端点a和b具有可积奇异性，并被表示为

$$f(x)=\frac{g(t)}{(t-a)^{\alpha}(b-t)^{\beta}}=\frac{g(t)e^{\pi i\beta}}{(t-a)^{\alpha}(t-b)^{\beta}} \tag{10.3}$$

$$a<t<b$$

$$\alpha=a_1+ib_1,\quad \beta=a_2+ib_2,\quad 0<a_k<1,\quad k=1,2$$

其中 $g(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 中满足赫尔德条件，$(t-a)^{-\alpha}(t-b)^{-\beta}$ 是在 $a<t<b$ 上连续变化的一个确定的分枝。研究下列分段全纯函数：

$$(10.4)\quad \phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{f(t)dt}{t-z}=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{g(t)e^{\pi i\beta}dt}{(t-a)^\alpha(t-b)^\beta(t-z)}$$

应用穆斯海里什维里（1953 a，第四章）介绍的方法，可以考察端点 a 和 b 附近 $\phi(z)$ 的奇异性质，而且函数可以被表示为

$$(10.5)\quad \phi(z)=\frac{g(a)}{(b-a)^\beta}\frac{e^{\pi i\alpha}}{\sin\pi\alpha}\frac{1}{(z-a)^\alpha}-\frac{g(b)}{(b-a)^\alpha}\frac{1}{\sin\pi\beta}\frac{1}{(z-b)^\beta}+\phi_0(z)$$

其中函数 $\phi_0(z)$ 除了端点外处处是有界的，而在端点附近

$$(10.6)\quad |\phi_0(z)|<C_k/|z-c_k|^{dk},\quad d_k<a_k,\quad c_k=(a,b), k=1,2$$

C_k 和 $d_k(k=1,2)$ 是实常数。

利用普利麦吉公式

$$(10.7)\quad \frac{1}{2}[\phi^+(x)+\phi^-(x)]=\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{f(t)dt}{t-x},\qquad a<x<b$$

(10.2) 式中的第一项可以表示为

$$(10.8)\quad \frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{c_0f(t)}{t-x}dt=\frac{c_0g(a)}{(b-a)^\beta}\operatorname{ctg}\pi\alpha\frac{1}{(x-a)^\alpha}-\frac{c_0g(b)}{(b-a)^\alpha}\operatorname{ctg}\pi\beta\frac{1}{(b-x)^\beta}+\phi_1(x),\qquad a<x<b$$

其中，在端点的附近

$$(10.9)\quad \phi_1(x)=\phi_{1k}(x)/|x-c_k|^{d_k}$$
$$d_k<a_k,\quad c_k=(a,b),\quad k=1,2$$

ϕ_{1k} 在端点 a 和 b 及其近傍满足赫尔德连续条件。

为了研究（10.2）式中第二组和第三组的性质，我们定义下列复变数（见图 8）：

(10.10) $a+(x-a)e^{i\theta_j}=z_{1j},\quad b+(b-x)e^{i\omega_s}=z_{2s}$

由图 8 可看出，当 x 在割线 $L=(a,b)$ 上变化时，z_{1j} 和 z_{2s} 在自角度 θ_j 和 ω_s 定义的线 L_{1j} 和 L_{2s} 上变化。很明显，由（10.4）式定义的函数 $\phi(z)$ 在 $z=z_{1j}$ 和 $z=z_{2s}$ 是全纯的，即除去对应于 $x=a$ 和 $x=b$ 的端点 $z_{1j}=a$ 及 $z_{2s}=b$ 外，在 L_{1j} 和 L_{2s} 上是全纯的。研究下列积分：

$$(10.11)\quad \frac{1}{\pi}\int_a^b c_{0j}\frac{f(t)dt}{t-z_{1j}}=\frac{c_{0j}}{\pi}\int_a^b\frac{g(t)e^{\pi i\beta}dt}{(t-a)^{\alpha}(t-b)^{\beta}(t-z_{1j})}$$

$$=c_{0j}\phi(z_{1j}),\quad a<x<b$$

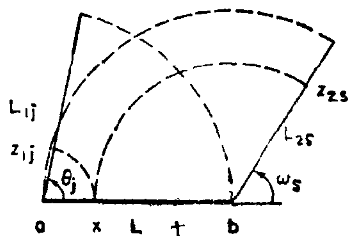


图 8 具有广义柯西核的积分方程的积分路线

因为 $\phi(z_{1j})$ 除了在 $z_{1j}=a=x$ 外处处是全纯的，在这一点附近（10.5）式给出

$$(10.12)\quad c_{0j}\phi(z_{1j})=\frac{c_{0j}g(a)e^{\pi i\alpha}}{(-a)^{\beta}\sin\pi\alpha}\frac{e^{-i\theta_j\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+F_{1j}^{0}(z_{1j})$$

在端点 a 的附近，函数 F 的性质由（10.6）式给出，该函数在其他点是有界的。类似地

$$(10.13)\quad \frac{1}{\pi}\int_a^b d_{0s}\frac{f(t)dt}{t-z_{2s}} = d_{0s}\phi(z_{2s})$$

$$= -\frac{d_{0s}g(b)}{(b-a)^{\alpha}\sin\pi\beta}\frac{e^{-i\omega_s\beta}}{(b-x)^{\beta}} + F_{2s}^{0}(z_{2s})$$

在端点 b 的附近，F_{2s}^{0} 也由（10.6）式给出。

为了得到其余项的表示式，我们注意

$$(10.14)\quad \frac{1}{\pi}\int_a^b c_{kj}(x-a)^k\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{t-z_{1j}}\right)f(t)dt$$

$$= c_{kj}(x-a)^k\frac{d^k}{dx^k}\phi(z_{1j})$$

$$= c_{kj}(-1)^k\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$$

$$\times\frac{g(a)e^{\pi i\alpha}}{(b-a)^{\beta}\sin\pi\alpha}\frac{e^{-i\theta_j\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + F_j^k(z_{1j})$$

$$k = 1, \cdot, \cdots, K$$

$$(10.15)\quad \frac{1}{\pi}\int_a^b d_{rs}(b-x)^r\frac{d^r}{dx^r}\left(\frac{1}{t-z_{2s}}\right)f(t)t$$

$$= d_{rs}(b-x)^r\frac{d^r}{dx^r}\phi(z_{2s})$$

$$= -d_{rs}\beta(\beta+1)\cdots(\beta+r-1)$$

$$\times\frac{g(b)}{(b-a)^{\alpha}\sin\pi\beta}\frac{e^{-i\omega\beta}}{(b-x)^{\beta}} + F_{2s}^{r}(z_{2s})$$

$$r = 1, \cdots, R$$

将（10.8）式和（10.12）—（0.15）式代入（10.2）式，我们得到

$$(10.16)\quad \frac{g(a)}{(b-a)^{\beta}\sin\pi\alpha}\frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\Big[c_0\cos\pi\alpha$$

$$+\sum_{1}^{J} c_{0j} e^{i\alpha(\pi-\theta_j)}+\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} c_{kj}(-1)^k \alpha(\alpha+1)\cdots$$

$$\times(\alpha+k-1)e^{i\alpha(\pi-\theta_j)}\Bigg]-\frac{g(b)}{(b-a)^{\alpha}\sin\pi\beta}\frac{1}{(b-x)^{\beta}}$$

$$\times\Bigg[c_0\cos\pi\beta+\sum_{1}^{S} d_{0s}e^{-i\beta\omega_s}+\sum_{1}^{R}\sum_{1}^{S} d_{rs}\beta(\beta+1)\cdots$$

$$\times(\beta+r-1)e^{-i\beta\omega_s}\Bigg]+\phi_1(x)+\sum_{0}^{K}\sum_{1}^{J} F_{1j}^{k}(z_{1j})$$

$$+\sum_{0}^{R}\sum_{1}^{S} F_{2s}^{r}(z_{2s})=F(x),\qquad a<x<b$$

由 (10.3) 式给出的 $f(t)$ 的定义及假定 f 在 a 和 b 有可积奇异性可以看出，$g(a)\neq 0$，$g(b)\neq 0$。注意到

$$\lim_{x\to c_k}(x-c_k)^{\gamma_k}F(x)=0$$

(10.17)

$$\lim_{x\to c_k}(x-c_k)^{\gamma_k}F_{kn}^{m}(z_{kn})=0$$

$k=1,2$；$\gamma_1=\alpha$；$\gamma=\beta$；$c_1=a$；$c_2=b$；$m=0,1,\cdots K,R$；$n=1,\cdots,J,S$。由 (10.16) 式我们得到

(10.18) $$c_0\cos\pi\alpha+\sum^{J} c_{0j}e^{i\alpha(\pi-\theta_j)}$$

$$+\sum_{1}^{K}\sum_{1}^{J} c_{kj}(-1)^k\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)e^{i\alpha(\pi-\theta_j)}=0$$

$$(10.19)\qquad c_0\cos\pi\beta+\sum_1^S d_{0s}e^{-i\beta\omega_s}$$

$$+\sum_1^R\sum_1^S d_{rs}\beta(\beta+1)\cdots(\beta+r-1)e^{-i\beta\omega_s}=0$$

（10.18）式和（10.19）式提供了用来确定未知常数 α 和 β 的特征方程。知道了 α 和 β 后，具有广义柯西核的积分方程（10.2）的基本解可以表示为

$$(10.20)\qquad w(t)=(t-a)^{-\alpha}(b-t)^{-\beta}$$

应该指出，对于割线是 n 个不相交的光滑弧 $L=\sum_1^n L_k$ 而不是实轴上的有限部分 ab 的一般问题，用本章介绍的方法也可以得到它的基本解。

第 11 章　第一类奇异积分方程的数值解

下列形式的奇异积分方程组

$$(11.1)\quad \sum_{1}^{M} a_{ij}(t)\phi_j(t) + \int_L \sum_{1}^{M} b_{ij}(\tau)\phi_j(\tau)d\tau/(\tau-t)$$

$$+\int_L \sum_{1}^{M} k_{ij}(t,\tau)\phi_j(\tau)d\tau = f_i(t), \quad t\in L,$$

$$i=1,\cdots,M$$

已经被广泛地研究过了（例如，见穆斯海里什维里 1953a；加克霍夫 1966）。在方程（11.1）中假使 $k_{ij}=0$ 即方程组仅由特征部分组成，通过将方程组简化为黎曼—希尔伯特问题，则可以很容易地得到该方程组封闭形式的解（见第 4 章、第 6 章和第 8 章，也可以参见第 12 章）。齐次黎曼—希尔伯特问题给出基本解矩阵。对于非齐次方程，利用基本矩阵将方程组简化为分段全纯函数矩阵的简单边界值问题，从而解出非齐次方程。在 $k_{ij}(t,\tau)\neq 0$ 的情况下，假设已知方程组的基本矩阵，标准的方法就是将奇异积分方程正则化，也就是说，把奇异积分方程组简化为带有弱奇异核的弗雷德霍姆型方程组。具体的简化方法可以用穆斯海里什维里（1953 a）介绍的伴随奇异算子法，或者用卡利曼（Carleman）和维古阿(Vekua)方法，在卡利曼和维古阿方法中将含有 $k_{ij}(t,\tau)$

的积分看成是输入部分，就可以得到特征方程组的解法（见维古阿 1967；加克霍夫 1966）。

在实际应用中，且不说寻找第二类奇异积分方程组的基本矩阵有多么困难，就是由正则化作出的叠奇异核对于有效的数值计算来说也就够繁的了。由于这个原因，以下几章我们将介绍如（11.1）形式的奇异积分方程组和具有广义柯西核的奇异积分方程组的某些数值解法。这些方法的主要特点是在数值分析中，未知函数的奇异性在使用实际的基本矩阵的整个过程中保持不变。

在介绍数值法时，我们将假定积分方程的基本变量 t 和 τ 是实数，以及线 L 由一条弧组成，该弧可以被规范化来覆盖区域（-1，1）。因此，奇异积分方程组的指数可以为 $\kappa=-1$，这意味着未知函数 ϕ_i 在端点 ∓ 1 是有界的，而 $\kappa=1$ 意味着函数 ϕ_i 在 ∓ 1 有可积奇异性，$\kappa=0$ 意味着函数在一个端点是有界的，而在另一个端点有可积奇异性。我们将仅介绍 $\kappa=\mp 1$ 的数值解法，一方面是因为有关正交多项式的大量研究可提供很有价值的应用，另一方面是因为在实际问题中我们经常地遇到它们。①

11.1　$\kappa=-1$的第一类奇异积分方程

我们研究奇异积分方程组(11.1)，其中系数 a_{ij} 等于零，b_{ij} 是给定的常数，核 k_{ij} 不含有弱奇异性，但可以有带常系数的对数奇异项，而且假设可以被分割出来。于是我们有

---

①原注　本章和第12章取材于作者（1969）的论文，在此仅作了一点修改。

$$(11.2)\quad \int_{-1}^{1}\sum^{M} b_{ij}\phi_j(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}+\int_{-1}^{1}\sum^{M} c_{ij}\phi_j(\tau)\ln|\tau-t|d\tau$$

$$+\int_{-1}^{1}\sum^{M} k_{ij}(t,\tau)\phi_j(\tau)d\tau=f_i(t)$$

$$i=1,\cdots,M,\quad -1<t<1$$

其中矩阵 b_{ij} 是满秩的，k_{ij} 是已知的且在闭区间 $-1\leqslant(t,\ \tau)\leqslant1$ 上是有界的，f_i 是满足赫尔德条件的给定函数

$$|f_i(t)-f_i(\tau)|\leqslant A_i|t-\tau|^{\mu_i},\quad 0<\mu_i\leqslant1,\quad -1\leqslant(t,\tau)\leqslant1$$

$A_i(i=1,\cdots,M)$ 是任意常数。研究（11.2）的每一个方程的特征部分，对于 $\phi_k(t)=\Sigma b_{kj}\phi_j(t)$ 的基本函数可以很容易地确定为（见第4章—第6章）

$$(11.3)\qquad X_k(t)=(1-t)^{1/2+\lambda_k'}(1+t)^{-1/2+\lambda_k''}$$

$$\lambda_k',\lambda_k''=0,\mp1$$

任意整数 λ_k'、λ_k'' 可以通过 $\phi_k(t)$ 在 ∓1 的奇异性质的物理意义来确定。假使 ϕ_k 在 ∓1 是有界的，或者虽是无穷大但是可积的，我们有

$$-1<\frac{1}{2}+\lambda_k'<1,\qquad -1<-\frac{1}{2}+\lambda_k''<1$$

方程相应的指数 $-(\lambda_k'+\lambda_k'')=\kappa_k$ 将有值 -1、0 或 1。于是，假使函数 ϕ_k 在 ∓1 是有界的，且具有相同的性质，$\kappa=-1$，基本函数是

$$(11.4)\qquad X_k(t)=(1-t^2)^{1/2}$$

在这种情况下，方程组的解除了满足方程组（11.2）外，它还必须满足下列相容性条件：

$$(11.5)\quad \int_{-1}^{1}\left[f_k(t)-\int_{-1}^{1}\sum_{1}^{M}\Big(k_{ij}(t,\tau)+c_{ij}\ln|t-\tau|\Big)\phi_j(\tau)d\tau\right]$$

$$\times \frac{dt}{X_k(t)} = 0 \qquad k = 1, \cdots, M$$

为了介绍奇异积分方程的近似数值解，本章和下面两章的主要内容是：在奇异积分方程 $K\phi = f$ 中，K 是含有柯西型奇异性的算子，ϕ 是未知函数，f 是已知函数，我们知道（参见穆斯海里什维里 1953 a）ϕ 可以表示为方程的基本函数 X 与一个在所研究的闭区间上是有界的函数的乘积，即 $\phi = Xg$。一般讲来，这个有界函数 g 不能确定为封闭形式的。但是应用另外的奇异算子（通常是 K 的伴随算子）将奇异积分方程正则化，所得的弗雷德霍姆积分方程就可以用来确定 g。一般地，由于化为奇异积分方程的问题的物理性质，函数 g 是连续的。于是 g 可以表示为一组已知函数的无穷级数，这些函数在给定的区间上是正交的，问题的解可以形式上简化为级数中未知系数的一组无穷个代数方程而不是弗雷德霍姆积分方程。

在本分册介绍的数值方法中，通过选取与基本函数 X_k 有关的正交多项式作为级数展开式中的完备系，奇异性是容易被消除的。通过加权剩余法将积分方程简化为一组无穷个代数方程，于是未知系数就得到了确定。

我们注意到，在方程（11.2）中对于 $\kappa = -1$ 的基本函数 $X_k(t)$ 是第二类切比雪夫多项式的权。于是，假设方程（11.2）的解的形式为

$$(11.6) \quad \phi_i = (1-t^2)^{1/2} \sum_{0}^{\infty} A_{in} U_n(t), \qquad i = 1, \cdots, M$$

我们看到，函数 ϕ_k 的奇异性质被保留不变，其中 $U_n(t)$ 是第二类切比雪夫多项式，$A_{in}(i = 1, \cdots, M;\ n = 0, 1, \cdots)$ 是常系

数。利用下列性质〔见厄尔地利（Erdelyi）1953〕

$$(11.7)\quad \int_{-1}^{1}[U_n(\tau)(1-\tau^2)^{1/2}/(\tau-t)]d\tau=-\pi T_{n+1}(t)$$

并定义

$$(11.8)\quad \int_{-1}^{1}U_n(\tau)(1-\tau^2)^{1/2}\ln|t-\tau|d\tau=V_n(t)$$

$$(11.9)\quad \int_{-1}^{1}k_{ij}(t,\tau)U_n(\tau)(1-\tau^2)^{1/2}d\tau=g_{ijn}(t)$$

由方程（11.2）我们得到

$$(11.10)\quad \sum_{j=1}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}[-\pi b_{ij}A_{jn}T_{n+1}(t)+c_{ij}A_{jn}V_n(t)+g_{ijn}(t)A_{jn}]=f_i(t)\qquad i=1,\cdots,M,\ -1<t<1$$

其中，$T_n(t)$是第一类切比雪夫多项式，$V_n(t)$由下式给出

$$(11.11)\quad V_n(t)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\left(-t^2+\dfrac{1}{2}+\ln 2\right), & n=0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{T_n(t)}{n}-\dfrac{T_{n+2}(t)}{n+2}\right), & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

为了得到（11.10）式中的未知常数A_{jn}，两边乘$T_k(t)\times(1-t^2)^{-1/2}$然后从$-1$积分到1。利用正交关系

$$(11.12)\quad \int_{-1}^{1}T_n(t)T_k(t)(1-t^2)^{-1/2}dt=\begin{cases}0, & n\neq k\\ \pi, & n=k=0\\ \pi/2, & n=k>0\end{cases}$$

并定义

$$\alpha_{nk}=\int_{-1}^{1}V_n(t)T_k(t)(1-t^2)^{-1/2}dt$$

$$(11.13)\qquad \beta_{ijnk}=\int_{-1}^{1}g_{ijn}(t)T_k(t)(1-t^2)^{-1/2}dt$$

$$f_{ik}=\int_{-1}^{1}f_i(t)T_k(t)(1-t^2)^{-1/2}dt$$

于是我们由（11.10）式得到

$$(11.14)\quad -(\pi^2/2)\sum_{j=1}^{M}b_{ij}A_{jk-1}+\sum_{j=1}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}(c_{ij}A_{jn}\alpha_{nk}+\beta_{ijnk}A_{jn})=f_{ik},\qquad i=1,\cdots,M,\ k=0,1,\cdots$$

$$A_{jn}=0,\ \text{当}\ n=-1\ \text{时}$$

方程（11.14）给出了确定系数 $A_{jn}(j=1,\cdots,M,\ n=0,1,\cdots)$ 的一组无穷个代数方程。

在方程（11.14）中，矩阵（α_{nk}）是双对角线矩阵，由下式给出

$$(11.15)\quad \alpha_{nk}=\begin{cases}0, & k\neq n,\ k\neq n+2\\ -(\pi^2/2)\ln 2, & k=n=0\\ -\pi^2/4n, & k=n>0\\ \pi^2/4(n+2), & k=n+2,\ n\geq 0\end{cases}$$

注意到当 $k=0$ 时，$A_{jk-1}=0$ 和 $T_0(t)=1$，并研究定义（11.6）式、（11.8）式、（11.9）式和（11.13）式，我们可以看到，由（11.14）式取 $k=0$ 得到的 M 个方程的第一组方程等价于（11.5）式给出的相容条件。因此，利用前面的方法，不需要参考或要求函数 ϕ_i、f_i 和 k_{ij} 的某些奇偶性质，就可以证明相容性条件是满足的。

在实际计算中，一组无穷个代数方程（11.14）可以用简化法解出〔如参见康托诺维奇（Kantorovich）和克雷洛夫（Krylov），1958〕，即对级数（11.6）取到第 n 项，把后面的项去掉，仅仅研究前 $N\times M$ 个方程。当然，为了收

敛，这个方法要求这组无穷个方程是完全正则的或准正则的。在非常精确地公式化了的物理问题中可以有这种情况，但是由于积分方程中弗雷德霍姆核的复杂性质，所以很难解析地证明这一点。

用上面介绍的方法，数值计算工作的主要部分是(11.8)式、(11.9)式及(11.13)式的积分计算，假使考虑到这样的事实，即在大多数情况下核 k_{ij} 或者是非常复杂的函数或者是用广义积分给出的，那么这些计算工作将是相当大量的。但是要看到，(11.8)式、(11.9)式和(11.13)式中的所有积分都是高斯-切比雪夫类型，用下列正常求积公式

(11.16) $$\int_{-1}^{1} h(t)(1-t^2)^{-1/2}dt \approx \sum_{1}^{p} w_i h(t_i)$$

$$w_i = \pi/p, \quad t_i = \cos\theta_i, \quad \theta_i = (2i-1)\pi/2p$$

及有关的多项式 $T_n(t) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$，和

(11.17) $$\int_{-1}^{1} h(t)(1-t^2)^{1/2}dt \approx \sum_{1}^{p} w_i h(t_i)$$

$$w_i = [\pi/(p+1)]\sin^2\theta_i, \ t_i = \cos\theta_i, \ \theta_i = i\pi/(p+1)$$

及有关的多项式 $U_n(t) = U_n(\cos\theta) = \sin(n+1)\theta/\sin\theta$，可以很容易地算出上述积分。实际上，系数 α_{nk} 和 β_{ijnk} 的计算是很简便的，这就有可能在级数(11.6)中考虑到很多项，从而使得近似解具有很高的精确度。

应该再次强调指出，上面介绍的方法是形式的。要在解析上是完备的，还必须证明由(11.6)式略去后面的项而得到的函数序列 ϕ_i^N 将收敛为精确解 ϕ_i。为此，人们必须证明序列 ϕ_i^N 是最低限度的，或者函数系(11.6)是相对完备的。对于所研究的一般问题的完备性方程似乎是很复杂的。对于

特殊情况，当 $N\to\infty$，$\phi^N\to\phi$ 的证明是由艾多温（1969）给出的。

11.2 $\kappa=1$ 的第一类奇异积分方程

假使未知函数$\phi_j(t)$在∓1是无界的但是可积的，方程的指数和基本函数将是

(11.18) $\qquad \kappa=1, \qquad X_k(t)=(1-t^2)^{-1/2}$

注意 $X_k(t)$ 是第一类切比雪夫多项式$T_n(t)$ 的权，方程(11.2) 的解可表示为

(11.19) $\phi_j(t)=(1-t^2)^{-1/2}\sum_0 B_{jn}T_n(t), \qquad j=1,\cdots,M$

利用下列关系式（见厄尔地利 1953）

(11.20) $$\int_{-1}^{1}T_n(\tau)(1-\tau^2)^{-1/2}d\tau/(\tau-t)=\begin{cases}0, & n=0\\ \pi U_{n-1}(t), & n>0\end{cases}$$

并定义

$$\int_{-1}^{1}T_n(\tau)(1-\tau^2)^{-1/2}\ln|t-\tau|d\tau=W_n(t)$$

$$\int_{-1}^{1}k_{ij}(t,\tau)T_n(\tau)(1-\tau^2)^{-1/2}d\tau=h_{ijn}(t)$$

(11.21) $$\gamma_{nk}=\int_{-1}^{1}W_n(t)U_k(t)(1-t^2)^{1/2}dt$$

$$\rho_{ijnk}=\int_{-1}^{1}h_{ijn}(t)U_k(t)(1-t^2)^{1/2}dt$$

$$F_{ik}=\int_{-1}^{1}f_i(t)U_k(t)(1-t^2)^{1/2}dt$$

在方程（11.2）的两边乘以 $U_k(t)(1-t^2)^{1/2}$，然后积分，我们得到

$$(11.22)\quad (\pi^2/2)\sum_{1}^{M} b_{ij}B_{jk+1}+\sum_{j=1}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}(c_{ij}B_{jn}\gamma_{nk}+\rho_{ijnk}B_{jn})=F_{ik}$$

其中 $i=1,\cdots,M$，$k=0,1,\cdots$，上式推导中使用了下列正交关系式

$$(11.23)\quad \int_{-1}^{1}U_n(t)U_k(t)(1-t^2)^{1/2}dt=\begin{cases}0, & n\neq k\\ \pi/2, & n=k\end{cases}$$

在（11.21）式中，函数 W_n 和双对角线矩阵 γ_{nk} 可以被算出为

$$(11.24)\quad W_n(t)=\begin{cases}-\pi\ln 2, & n=0\\ -(\pi/n)T_n(t), & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

$$(11.25)\quad \gamma_{nk}=\begin{cases}-(\pi^2/2)\ln 2, & n=k=0\\ 0, & n\neq k,\ n\neq k+2\\ -\pi^2/4n, & n=k>0\\ \pi^2/4n & n=k+2,\ k\geqslant 0\end{cases}$$

在 $\kappa=1$ 的情况下，一般地有一些附加的（物理）条件，在用（11.19）式和（11.22）式给出解时没有用到这些条件。在函数论方法中，积分方程组的解含有一组任意的(复)常数,这些常数要用附加的条件来确定(见第 4 章一第 8 章)。在大多数物理问题中，这些条件就是函数 $\phi_i(t)$ 在区间 $(-1,1)$ 上的零次矩或一次矩，即

$$(11.26)\quad \int_{-1}^{1}\phi_i(t)dt=P_i,\qquad \int_{-1}^{1}t\phi_i(t)dt=M_i,\ i=1,\cdots,M$$

其中 P_i，M_i 是给定的常数。把（11.19）式代入（11.26）式，并利用正交关系式（11.12），可以看出

(11.27) $B_{i0}=P_i/\pi$ 或 $B_{i1}=2M_i/\pi \qquad i=1,\cdots,M$

其余的常数 B_{ij} 可以由（11.22）式取 $k=1,2,\cdots$（或 $k=0,2,3,\cdots$）得到。对于不同于（11.26）形式所给出的条件可以用类似的方法来处理。假使问题具有某一类对称性，人们在（11.6）式和（11.19）式中可以仅取偶数项或奇数项，这样就可以大大地简化数值计算工作。

注记（i） 参考（11.3）式，假使方程的指数是零，也就是说，假使函数在一个端点是有界的，在另一个端点是无界的，人们可以把函数和核的定义推广到区间（-1，1）以外，从而把问题简化为指数 $\kappa=1$ 的方程；或者我们注意到 $\kappa=0$ 的基本函数 $(1-t)^{1/2}(1+t)^{-1/2}$ 是雅可比（Jacobi）多项式 $P_n^{(1/2,-1/2)}(t)$ 的权，利用这些多项式的性质，采用类似于上面给出的方法可以得到方程的近似解。

注记（ii） 实际上，表示奇点 ∓ 1 强度的量具有鲜明的物理意义（例如固体力学中的应力强度因子），参考（11.6）式和（11.19）式，它们可以很容易地表示为

$$(11.28)\quad \lim_{t\to\mp 1}\phi_i(t)(1-t^2)^{-1/2}=\sum_0^\infty A_{in}U_n(\mp 1)$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\left\{\begin{matrix}(-1)^n\\ 1\end{matrix}\right\}(n+1)A_{in}\qquad \kappa=-1$$

$$(11.29)\quad \lim_{t\to\mp 1}\phi_i(t)(1-t^2)^{1/2}=\sum_0^\infty B_{in}T_n(\mp 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} (-1)^n \\ 1 \end{matrix} \right\} B_{in}, \qquad \kappa = 1$$

注记(iii) 假使方程组（11.1）中的核 $k_{ij}(t,\tau)$ 仅仅是赫尔德连续的，对它们没有进一步的限制，亦即假使它们含有像对数奇异性之类的弱奇异项，上面所介绍的方法仍旧是可以用的。在这种情况下，必须特别注意求含有 k_{ij} 的积分。

注记(iv) 假使方程组（11.2）中的系数矩阵（b_{ij}）和（c_{ij}）不是常数而是已知的函数，矩阵（b_{ij}）在（$-1,1$）中是满秩的，通过定义 $\phi_i(t)=\Sigma b_{ij}(t)\phi_j(t)$ 方程组（11.2）可以简化为特征部分有常系数的方程组。在这种情况下，因为核的对数部分的系数不是常数，(11.14）式中的 α_{nk} 和（11.22）式中的 γ_{nk} 不可能得到封闭形式的解。

注记(v) 最后，我们要指出，对于具有混合指数的方程组应用这个方法不会出现较大的困难，具有混合指数的方程组是指对某些未知函数 ϕ_i 它的 $\kappa=-1$，而其余未知函数 ϕ_i 的 $\kappa=+1$。

例 1　半平面上的弹性肋板

我们研究这样一个平面问题，即在弹性半平面 $y<0$，$-\infty<x<\infty$ 上连接着一块薄的弹性肋板（图 9）。设 κ，μ 和 κ_1，μ_1 分别是平面和肋板的弹性常数。设肋板长度的一半

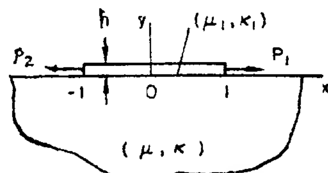


图 9　半平面上的弹性盖板

被标准化为1，设它的厚度为h。设h足够的小就得到广义平面应力，这个假设对于肋板是正确的，并设接触应力是$t_{xy}(x,0)=\phi(x)$。

注意，$t_{yy}(x,0)\approx 0$，由下列平衡条件和连续条件

(11.30) $$ht_{xx}^1(x)=h\frac{8\mu_1}{1+\kappa_1}\frac{\partial u_x^1}{\partial x}=P_2+\int_{-1}^{x}\phi(t)dt$$

(11.31) $$\frac{\partial}{\partial x}u_x^1(x)=\frac{\partial}{\partial x}u_x(x,0),\qquad -1<x<1$$

并利用（5.10）式我们得到

(11.32) $$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)dt}{t-x}-\lambda\int_{-1}^{x}\phi(t)dt=F(x)$$

要求

(11.33) $$\int_{-1}^{1}\phi(t)dt=P_1-P_2$$

其中，u_x和u_x^1分别是平面和肋板的位移向量在x方向的分量，而

(11.34) $$\lambda=\frac{1+\kappa_1}{1+\kappa}\frac{\mu}{2\mu_1 h}$$

假使我们仅仅研究对称问题，$P_1=P_2=P$，函数$F(x)$由下式给出

(11,35) $$F(x)=\lambda P-\frac{4\mu}{1+\kappa}g(x)$$

$g(x)$是由不同于$\phi(x)$的外载荷引起的半平面上在$y=0$的应变（见艾多温和格普塔1971 c）。

奇异积分方程（11.32）的基本函数为

(11.36) $$w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$$

于是，注意到$\phi(x)=-\phi(-x)$，我们可以写出

$$(11.37a)\qquad \phi(x)=(1-x^2)^{-1/2}\sum_1^{\infty}B_jT_{2j-1}(x)$$

根据 11.2 节介绍的方法我们得到

$$(11.37b)\qquad \sum_1^{\infty}B_j\left\{U_{2j-2}(x)+\frac{\lambda}{2j-1}\sin[(2j-1)\cos^{-1}x]\right\}$$

$$=F(x),\qquad |x|<1$$

对于"均匀载荷"$F(x)=P_0$（例如，$P_0=-t_0/2, t_0=t_{xx}^{\infty}$ 是作用在远离并平行于肋板的半平面上的均匀应力），利用函数 $U_{2k}(x)(1-x^2)^{1/2}$ 作为权，由（11.37a）式我们得到

$$(11.38)\qquad B_k=\sum_1^{\infty}c_{kj}B_j+D_{k-1},\qquad k=1,2,\cdots$$

$$c_{kj}=\frac{2\lambda}{\pi}\left(\frac{1}{(2k-2)^2-(2j-1)^2}-\frac{1}{(2k)^2-(2j-1)^2}\right)$$

$$D_0=P_0,\qquad D_{k-1}=0,\qquad k>1$$

如果这组无穷个方程（11.38）是正则的或拟正则的，利用简化法它是可以解出的。为了具有正则性，系数必须满足下列关系式（见康托诺维奇和克雷洛夫，1958）：

$$(11.39)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}|c_{kj}|<1,\qquad k=1,2,\cdots$$

由（11.38）式和（11.39）式，在求和以后，我们得到

$$(11.40)\qquad \frac{2\lambda}{\pi}\left[\frac{8(2k-1)}{(4k-3)(4k-1)}+2\sum_{j=1}^{k-2}\left(\frac{1}{(2k-2)^2-(2j-1)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{(2k)^2-(2j-1)^2}\right)\right]<1$$

上式括弧内的量在 $k=1$ 时具有它的最大值。于是找到了保证方程组是正则的 λ 的范围

(11.41) $$\lambda<3\pi/16$$

对于大于 $3\pi/16$ 的 λ 值,如果存在着一个 k,从第 $(k+1)$ 个方程开始的一组无穷个方程是正则的,在这种意义下,(11.38)式是拟正则的。

由(11.37a)式,应力奇异性的强度可以表示为

(11.42) $$A=A(\infty)=\lim_{x\to 1}(1-x^2)^{1/2}\phi(x)=\sum_1^\infty B_k,$$

$$A(N)=\sum_1^N B_k$$

方程(11.38)可用简化法解出,这就是说,仅仅研究前 N 个方程和前 N 个未知数。对于一些指定的 N 及 $\lambda=10/3$ 和 $\lambda=1/3$ 计算出的 $A(N)$ 值列于表 1 中。注意,$10/3>\lambda_{cr}=3\pi/16>1/3$,表示了 $A(N)$ 收敛的两种情况。不过,表 1 表明对于这两种情况收敛性都是很好的。

表 1　$A(N)$ 的值

N	$\lambda=\frac{10}{3}$	$\lambda=\frac{1}{3}$
5	0.40245222	0.83161663
10	0.40955555	0.83297383
15	0.41081248	0.83322133
20	0.41124571	0.83330764
25	0.41144482	0.83334753
30	0.41155222	0.83336917

例 2　带有裂纹的弹性半平面

作为第二个例子我们研究第 8 章中提到的问题的一种特殊情况，亦即，设 $L=(-1,1)$，$\mu_2=0$，$p_1(x)=p_0$ 及 $p_2(x)=0$（见图 6）。问题的积分方程由（8.31）—（8.35）式给出。可以看出，两个方程的基本函数是相同的，且由下式给出

(11.43)
$$W(x)=(1-x^2)^{-1/2}$$

考虑到对称性质 $f_1(x)=f_1(-x)$，$f_2(x)=-f_2(-x)$，从而我们有

(11.44)
$$f_1(x)=(1-x^2)^{-1/2}\sum_1^\infty B_{1n}T_{2n}(x)$$
$$f_2(x)=(1-x^2)^{-1/2}\sum_1^\infty B_{2n}T_{2n-1}(x)$$

可以看出单值条件〔见（8.36）式〕

(11.45)
$$\int_{-1}^1 f_1(x)dx=0,\qquad \int_{-1}^1 f_2(x)dx=0$$

第二个式子是满足的，第一个式子给出 $B_{10}=0$。其余的常数可由（11.22）式用简化法得到。

在这个问题中，用下式定义应力强度因子 k_1 和 k_2

(11.46)
$$t_{yy}(x,0)=\frac{k_1}{[2(x-1)]^{1/2}}+O(x-1)^{1/2}$$
$$t_{xy}(x,0)=\frac{k_2}{[2(x-1)]^{1/2}}+O(x-1)^{1/2}$$

可以很容易地证明

(11.47)
$$\frac{1+\kappa}{2\mu}k_1=-\lim_{x\to 1}(1-x^2)^{1/2}f_2(x)=-\sum_1^\infty B_{2n}$$

$$(11.48)\quad \frac{1+\kappa}{2\mu}k_2 = -\lim_{x\to 1}(1-x^2)^{1/2}f_1(x) = -\sum_0^\infty B_{1n}$$

表 2　k_1、k_2的值

h	N	k_1	k_2
0.2	2	4.6298	2.0294
	4	4.6981	1.6925
	6	4.7621	1.7173
	8	4.7600	1.7181
0.4	2	2.5437	0.7649
	4	2.5949	0.7364
	6	2.5957	0.7376
	8	2.5956	0.7375
0.6	2	1.9226	0.4265
	4	1.9616	0.4298
	6	1.9608	0.4296
0.8	2	1.6386	0.2678
	4	1.6610	0.2716
	6	1.6609	0.2715
1.0	2	1.4741	0.1775
	4	1.4860	0.1796
	6	1.4860	0.1796
1.2	2	1.3660	0.1223
	4	1.3722	0.1234
	6	1.3722	0.1234
1.5	2	1.2603	0.0743
	4	1.2628	0.0746
2.0	2	1.1615	0.0366
	4	1.1621	0.0367
3.0	2	1.0778	0.0123
	4	1.0778	0.0123
∞	1	1.0	0

表2列出了对于$p_0=-1$、裂纹与自由表面距离h的不同值及级数（11.44）式被保留的项数N的不同值所对应的应力强度因子值。

与前一个例子不同，在这个例子里不可能研究一组无穷个代数方程的正则性。但是，由表2可以看出，收敛性是相当好的，仅仅用增加N的办法就可以得到所要求的精确度。应该指出，在这个问题里，收敛的速度对于参数h的值是非常敏感的，很显然，在方程组的正则化中h起了决定性的作用。在$h=\infty$的特殊情况下，弗雷德霍姆核k_{ij}等于零，$N=1$给出精确解。本章介绍的方法对某些更复杂问题的应用可在艾多温和格普塔（1971 a）、艾林和艾多温（1971）、艾多温和拉特瓦里（1970、1972）的论文中找到。

第 12 章 第二类奇异积分方程的解

研究下列奇异积分方程组

$$(12.1)\qquad A\phi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_a^b B\phi(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}+\int_a^b K(t,\tau)\phi(\tau)d\tau=f(t),\qquad a<t<b$$

其中系数矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 是常数，矩阵 $A\mp B$ 是满秩的，已知的函数 $f=(f_i)$和 $K=(k_{ij})$ 在区间 (a,b) 内是赫尔德连续的。我们要寻找满足赫尔德条件、在 a 和 b 具有某种奇异性的解。为了解这个问题，首先我们通过解下列齐次特征方程组来找出基本矩阵

$$(12.2)\qquad A\phi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_a^b B\phi(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}=0,\qquad a<t<b$$

用下式定义矩阵 $\Phi(z)=(\Phi_j)$

$$(12.3)\qquad \Phi_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\phi_j(t)dt}{t-z},\qquad j=1,\cdots,M$$

于是（12.2）式可以写成

$$(12.4)\qquad (A+B)\Phi^+(t)=(A-B)\Phi^-(t),\qquad a<t<b$$

其中 Φ^+ 和 Φ^- 对应于分段全纯函数 $\Phi_i(z)$ 的边界值。现在我们来找齐次黎曼-希尔伯特问题（12.4）的解

$$(12.5)\qquad \Phi(z)=rw(z),\qquad w^+(t)=\lambda w^-(t)$$

其中 w 是个标量函数，列矩阵 r 和系数 λ 是常数。把（12.5）

式代入（12.4）式，我们得到下列特征值问题：

$$(A-B)r=\lambda(A+B)r \tag{12.6}$$

设由（12.6）式得到的特征值和特征向量是λ_1，…，λ_M和(r_{j1})，…，(r_{jM})。对应于每一个λ_k，我们得到下列一个特征函数$w_k(z)$：

$$w_k^{+}(t)=\lambda_k w_k^{-}(t),\quad k=1,\cdots,M \tag{12.7}$$

$$w_k(z)=(z-a)^{\alpha_k}(z-b)^{\beta_k} \tag{12.8}$$

其中

$$\alpha_k=\alpha_k'+i\beta_k'+\gamma_k',\qquad \beta_k=\alpha_k''+i\beta_k''+\gamma_k''$$

$$\alpha_k'+i\beta_k'=-\ln\lambda_k/2\pi i,\qquad \alpha_k''+i\beta_k''=\ln\lambda_k/2\pi i \tag{12.9}$$

$$-1<\alpha_k'+\gamma_k'<1,\qquad -1<\alpha_k''+\gamma_k''<+1$$

整数γ_k'，γ_k''用这样一种方式来选取，即要使得基本函数$w_k(z)$在a和b的性质与未知函数$\phi_j(t)$所要求的奇异性是一致的（即，或者是有界的，或者是无界但是可积的）。常数

$$\kappa_k=-(\alpha_k+\beta_k)=-(\gamma_k'+\gamma_k'') \tag{12.10}$$

称为$w_k(z)$的指数。在重要的物理问题中，特征值λ_k是负的实数，它给出

$$\alpha_k=\mp\frac{1}{2}+\frac{\ln|\lambda_k|}{2\pi}i,\qquad \beta_k=\mp\frac{1}{2}-\frac{\ln|\lambda_k|}{2\pi}i \tag{12.11}$$

$$\kappa_k=-1,\ 0,\ 1$$

方阵

$$W=(w_{kj}(z))=(r_{kj}w_j(z)) \tag{12.12}$$

通常称之为**边界值问题**（12.4）的**基本矩阵**。只要W被找出，方程（12.4）和（12.2）的通解则可得到，它们分别为

$$\phi_k(z)=\sum_{j=1}^{M}r_{kj}w_j(z)P_j(z),\quad k=1,\cdots,M \tag{12.13}$$

(12.14) $\phi_k(t)=\Phi_k^+(t)-\Phi_k^-(t),\quad k=1,\cdots,M$

其中 $P_j(z)(j=1,\cdots,M)$ 是任意的多项式，它在无穷远处的性质与 Φ_k 是一致的。

很容易看出

(12.15) $(A+B)W^+(t)=(A-B)W^-(t)$

现在我们研究非齐次问题

(12.16)
$$A\phi(t)+(1/\pi i)\int_a^b B\phi(\tau)d\tau/(\tau-t)=g(t)$$
$$(A+B)\Phi^+(t)=(A-B)\Phi^-(t)+g(t),\quad a<t<b$$

通过利用（12.15）式，我们得到

(12.17) $(W^{-1}\Phi)^+=(W^{-1}\Phi)^-+(NW^+)^{-1}g,\quad N=A+B$

由（12.17）式，得到方程（12.16）的通解

(12.18)
$$\Phi(z)=\frac{W(z)}{2\pi i}\int_a^b[NW^+(\tau)]^{-1}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z}+W(z)P(z)$$

其中矩阵 $P(z)=[P_n(z)]$的元素是任意的多项式，这些多项式在无穷远点的性质与 $\Phi(z)$是一致的。在特征值 λ_k 为负实数的特殊情况下，我们有：

(a) $\kappa=1$，$\phi_k(t)$在 $t=a$ 和 $t=b$ 是无穷大的但是可积的。对于在无穷远处等于零的解，$P_n=C_n=$常数，常数$C_1,\cdots,C_M$ 可由第11章阐述的物理条件得到。

(b) $\kappa=0$，$\phi_k(t)$ 在一个端点是有界的，在另一个端点是无穷大但是可积的。(12.18) 式给出带 $P(z)=0$ 的解。

(c) $\kappa=-1$，$\phi_k(t)$ 在两个端点都是有界的。倘若下列相容性条件被满足的话

$$(12.19) \qquad \int_a^b (NW^+)^{-1} g(t)dt = 0$$

则（12.18）式给出带 $P(z)=0$ 的解。

现在我们来看积分方程（12.1），注意，在具有常系数的第二类奇异积分方程中，假如区间(a,b)被标准化为$(-1,1)$，则基本函数 $w_k(t)$ 是雅可比多项式 $P_n^{(\beta_k,\alpha_k)}(t)$ 的权。因此，利用雅可比多项式的性质〔例如，见塞歌（Szegö）1939；厄尔地利 1953，1954；卡尔潘柯(Karpenko)1966〕，采用类似于第 11 章的方法，可以进一步发展解方程组(12.1)的数值方法。要做到这一点，我们首先用 A^{-1}左乘（12.1）式（假设 A 是满秩的），并将矩阵 $A^{-1}B=D=(d_{ij})$ 对角线化。设 λ_i、r_i、R 分别是特征值、特征向量、D 的模态矩阵，即

$$(12.20) \qquad |D-\lambda I| = (-1)^M \prod_1^M (\lambda-\lambda_i), \qquad D=A^{-1}B$$

$$Dr_i = \lambda_i r_i, \qquad i=1,\cdots,M, \qquad R=(r_{ij})$$

作变换

$$(12.21) \qquad \phi(t) = R\phi(t), \qquad \Lambda = (\lambda_i \delta_{ij})$$

并利用性质 $DR=R\Lambda$，可以看出，（12.1）式可以写成

$$(12.22)^{①} \quad \phi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_a^b \Lambda\phi(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t} + \int_a^b R^{-1}A^{-1}K(t,\tau)R\phi(\tau)d\tau = R^{-1}A^{-1}f(t), \qquad a<t<b$$

①译注　原文有印刷错误。

方程（12.22）中的特征方程组是分离的．可以很容易地求解给出基本函数，假设区间 (a,b) 被标准化为 $(-1,1)$，基本函数可以写为

$$(12.23)\qquad w_k(t)=(1-t)^{\alpha_k}(1+t)^{\beta_k},\quad k=1,\cdots,M,\quad -1<t<1$$

其中

$$\alpha_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{1-\lambda_k}{1+\lambda_k}\right)+\gamma'_k,$$

$$\beta_k=-\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{1-\lambda_k}{1+\lambda_k}\right)+\gamma''_k$$

整数 γ'_k 和 γ''_k 用这样一种方式选取，即要使得 $w_k(t)$ 在 ∓ 1 的奇异性质与 $\phi_k(t)$ 是一致的。于是，对应的指数为 $\kappa_k=-\alpha_k-\beta_k\geqslant -1$。

现在，方程组（12.22）的解可写为

$$(12.24)\qquad \phi_k(t)=\sum_{0}^{\infty}c_{kn}w_k(t)P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(t),\quad k=1,\cdots,M,\quad -1<t<1$$

其中常数 c_{kn} 是未知的。定义下列矩阵：

$$(12.25)\qquad \begin{aligned}&R^{-1}A^{-1}K(t,\tau)R=H(t,\tau)=(h_{km}(t,\tau)),\\ &\qquad k,m=1,\cdots,M\\ &R^{-1}A^{-1}f(t)=g(t)=(g_k(t)),\quad k=1,\cdots,M\end{aligned}$$

把（12.24）式代入（12.22）式，我们得到

$$(12.26)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}c_{kn}\Big[w_k(t)P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(t)+\frac{\lambda_k}{\pi i}\int_{-1}^{1}w_k(\tau)P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}\Big]$$

$$+\int_{-1}^{1}\sum_{m=1}^{M}h_{km}(t,\tau)\sum_{j=0}^{\infty}c_{mj}w_m(\tau)P_j^{(\alpha_m,\beta_m)}(\tau)d\tau$$

$$=g_k(t),\qquad -1<t<1,\qquad k=1,\cdots,M$$

利用下列关系式（见卡尔潘柯1966）

(12.27) $$P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(t)w_k(t)+\frac{\lambda_k}{\pi i}\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(\tau)w_k(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$=(-1)^{\kappa_k+\gamma'_k}2^{-\kappa_k}(1-\lambda_k^2)^{1/2}P_{n-\kappa_k}^{(-\alpha_k,-\beta_k)}(t)$$

并定义

(12.28) $$\omega_{kmj}(t)=\int_{-1}^{1}h_{km}(t,\tau)P_j^{(\alpha_m,\beta_m)}(\tau)w_m(\tau)d\tau$$

我们得到

(12.29) $$\sum_{n=0}^{\infty}c_{kn}(-1)^{\kappa_k+\gamma_k'}2^{-\kappa_k}(1-\lambda_k^2)^{1/2}P_{n-\kappa_k}^{(-\alpha_k,-\beta_k)}(t)$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=0}^{\infty}c_{mj}\omega_{kmj}(t)=g_k(t),$$

$$-1<t<1,\qquad k=1,\cdots,M$$

上式可用下列方法简化为一组无穷个代数方程，设

(12.30) $$w_{-k}=(1-t)^{-\alpha_k}(1+t)^{-\beta_k}$$

于是用 $w_{-k}(t)P_r^{(-\alpha_k,-\beta_k)}(t)$ 乘（12.29）式的两边，对 t 积分，利用正交关系式（见厄尔地利 1954）

$$(12.31)\quad \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\, P_j^{(\alpha,\beta)}(t) w(t) dt$$

$$= 0, \qquad n \neq j$$

$$= \theta_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

$$n = j$$

我们得到

$$(-1)^{\kappa_k+\gamma_k'}2^{-\kappa_k}(1-\lambda_k^2)^{1/2}c_{k,p+\kappa_k}\theta_p^{(-\alpha_k,-\beta_k)}$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=0}^{\infty} d_{kmpj}c_{mj} = G_{kp}, \quad k=1,\cdots,M, \quad p=0,1,\cdots$$

(12.32)

$$G_{kp} = \int_{-1}^{1} g_k(t)\, P_p^{(-\alpha_k,-\beta_k)}(t) w_{-k}(t) dt$$

$$d_{kmpj} = \int_{-1}^{1} \omega_{kmj}(t) P_p^{(-\alpha_k,-\beta_k)}(t) w_k(t) dt$$

我们还注意到，因为$P_0^{(\alpha,\beta)}(t)=1$，在$\kappa_k=-1$的情况下，对应于（12.32）式中$p=0$的方程等价于下列相容性条件：

$$(12.33)\quad \int_{-1}^{1}\left[g_k(t) - \int_{-1}^{1}\sum_{1}^{M} h_{km}(t,\tau)\phi_m(\tau)d\tau\right]$$

$$\times dt/w_k(t) = 0, \qquad k=1,\cdots,M$$

在$\kappa_k=1$（$k=1,\cdots,M$）的情况下，解还必须满足（11.26）形式的M个附加（物理）条件。

作为一个非常简单的例子，我们研究积分方程(8.45)，设$L+\overline{L}=(-1,1)$。在这个问题中，函数$\phi(t)$在∓1有可积奇异性。因此，$\kappa=1$，$\gamma_1'=-1$，$\gamma_1''=0$。对于由(8.55)

式给出的输入函数，亦即 $p(x)=-p_0/2\mu_0$，假设有（12.24）形式的解，把它代入（8.45）式，利用（12.27）式，两边乘以

(12.34) $(1-x)^{-\alpha_1}(1+x)^{-\beta_1}P_n^{(-\alpha_1,-\beta_1)}(x)$，$n=0,1,2,\cdots$

在（-1,1）范围内积分，我们得到

$$\phi(x)=\sum_0^\infty c_n(1-x)^{\alpha_1}(1+x)^{\beta_1}P_n^{(\alpha_1,\beta_1)}(x) \tag{12.35}$$

$$\int_{-1}^1 \phi(x)dx=0 \longrightarrow c_0=0$$

$$c_1=-ip_0/\mu_0(1-\gamma^2)^{1/2}, \quad c_n=0, \ n=2,3,\cdots$$

这就是（8.57）式给出的解。

一组无穷个代数方程（12.32）的解也可以由简化法得到。关于把这个方法应用于更复杂的问题以及关于数值解收敛性的讨论，可参见艾多温和格普塔的论文（1971b）。

第13章　利用高斯-切比雪夫和高斯-雅可比积分公式求解

这一章将讨论给定的奇异积分方程组的直接数值解法。这个方法是建立在奇异积分的高斯-切比雪夫类型积分公式基础之上的，利用切比雪夫多项式的某些简单性质，这个方法可以得到进一步的发展（见艾多温和格普塔，1972b）。

13.1　奇异积分的高斯-切比雪夫积分公式

在推导奇异积分的高斯-切比雪夫积分公式以前，我们将证明下列两个辅助公式

$$(13.1)\qquad \sum_{k=1}^{n} T_j(t_k)/n(t_k-x_r)=\begin{cases}0, & j=0\\ U_{j-1}(x_r), & 0<j<n\end{cases}$$

$$T_n(t_k)=0,\ U_{n-1}(x_r)=0$$

和

$$(13.2)\qquad \sum_{k=1}^{n}(1-t_k^2)U_j(t_k)/(n+1)(t_k-x_r)$$

$$=-T_{j+1}(x_r),\qquad n>j$$

$$U_n(t_k)=0,\qquad T_{n+1}(x_r)=0$$

其中$T_n(x)$和$U_n(x)$是用下式定义的切比雪夫多项式

$$(13.3)\quad T_n(x)=\cos n\theta,\qquad U_n(x)=\sin(n+1)\theta/\sin\theta$$

$$\cos\theta = x$$

为了证明(13.1)式，我们研究下列简单的分式展开式:

(13.4) $$U_{n-j-1}(x)/T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k/(t_k - x), \quad T_n(t_k) = 0$$

其中

(13.5) $$\begin{aligned} a_k &= -U_{n-j-1}(t_k)/T_n'(t_k) \\ &= -U_{n-j-1}(t_k)/nU_{n-1}(t_k) \end{aligned}$$

利用递推公式（见厄尔地利1953）

(13.6) $$U_{n-j-1}(x) = T_j(x)U_{n-1}(x) - T_n(x)U_{j-1}(x)$$

并注意到 $T_n(t_k) = 0$，由（13.4）式和（13.5）式我们得到

(13.7) $$\sum_{k=1}^{n} T_j(t_k)/n(t_k - x) = -U_{n-j-1}(x)/T_n(x)$$

由于 $x = x_r$，$U_{n-1}(x_r) = 0$，(13.1）式的 $j = 0$ 部分可由上式得到。对于 $j > 0$，由（13.6）式和（13.7）式我们得到

(13.8) $$\sum_{k=1}^{n} T_j(t_k)/n(t_k - x)$$

$$= U_{j-1}(x) - [T_j(x)U_{n-1}(x)/T_n(x)]$$

由于 $x = x_r$，$U_{n-1}(x_r) = 0$，上式则简化为（13.1）式。

为了证明（13.2）式，我们研究下列展开式

(13.9) $$U_{n-j-1}(x)/U_n(x) = \sum_{1}^{n} b_k/(t_k - x)$$

其中，注意到 $U_n(t_k) = 0$，并根据文献（厄尔地利1953）

(13.10) $$(1 - t^2)U_n'(t) = (n+1)U_{n-1}(t) - ntU_n(t)$$

常数 b_k 由下式给出

(13.11) $$b_k = -U_{n-j-1}(t_k)/U'_n(t_k) = -(1-t_k^2)U_{n-j-1}(t_k)/(n+1)U_{n-1}(t_k)$$

利用（13.6）式及递推公式（厄尔地利 1953）

(13.12) $$T_n(t) = U_n(t) - tU_{n-1}(t), \quad U_j(t) = T_j(t) + tU_{j-1}(t)$$

再注意到 $U_n(t_k)=0$，由（13.9）式及（13.11）式我们得到

(13.13) $$\sum_{k=1}^{n}(1-t_k{}^2)U_j(t_k)/(n+1)(t_k-x) = -U_{n-j-1}(x)/U_n(x)$$

利用（13.6）式，把 j 换成 $j+1$，n 换成 $n+1$，则(13.13)式变成

(13.14) $$\sum_{k=1}^{n}(1-t_k{}^2)U_j(t_k)/(n+1)(t_k-x) = -T_{j+1}(x) + [U_j(x)T_{n+1}(x)/U_n(x)]$$

由于 $x=x_r$，$T_{n+1}(x_r)=0$，上式则简化为（13.2）式。

现在我们来研究下列奇异积分

(13.15) $$S(x) = (1/\pi)\int_{-1}^{1}\phi(t)dt/(t-x), \qquad -1<x<1$$

其中

(13.16) $$\phi(t) = X(t)F(t), \qquad X(t) = (1-t^2)^{\mp 1/2}$$

$F(t)$在 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上是有界的。

(a) $\kappa=1$ 的情况

在这种情况下，$X(t)=(1-t^2)^{-1/2}$ 是 $T_j(t)$的权。假设在 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 内，函数 $F(t)$可以用下列截项级数近似到足够

的精确程度：

$$F(t) \approx \sum_{0}^{p} B_j T_j(t) \tag{13.17}$$

于是，(13.15) 式可以被表示为

$$S(x) \approx \sum_{j=0}^{p} B_j \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_j(t)dt}{(t-x)(1-t^2)^{1/2}} = \sum_{j=1}^{p} B_j U_{j-1}(x) \tag{13.18}$$

其中用到下列关系式（厄尔地利 1953）：

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_j(t)dt}{(t-x)(1-t^2)^{1/2}} = \begin{cases} 0, & j=0 \\ U_{j-1}(x), & j>0 \end{cases} \quad (-1<x<1) \tag{13.19①}$$

对于 $x=x_r$，由 (13.18) 式、(13.17) 式及 (13.1) 式得到

$$S(x_r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{t-x_r} \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}} \approx \sum_{j=1}^{p} B_j U_{j-1}(x_r) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{B_j T_j(t_k)}{n(t_k-x_r)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{F(t_k)}{n(t_k-x_r)} \tag{13.20}$$

---

①译注　原文有印刷错误。

其中

$$T_n(t_k)=0,\quad t_k=\cos[(\pi/2n)(2k-1)],$$

(13.21) $$k=1,\cdots,n$$

$$U_{n-1}(x_r)=0,\quad x_r=\cos(\pi r/n),\quad r=1,\cdots,n-1$$

假使考虑到高斯-切比雪夫积分公式〔例如，见斯特劳德(Stroud) 和西克雷斯特 (Secrest), 1966〕

(13.22) $$(1/\pi)\int_{-1}^{1} f(t)dt/(1-t^2)^{1/2}$$

$$\approx\sum_{1}^{n} f(t_k)/n,\quad T_n(t_k)=0$$

可以看出,(13.20) 式形式上表示奇异积分的高斯-切比雪夫积分公式,实际上它仅在$x=x_r(r=1,\cdots,n-1),U_{n-1}(x_r)=0$的离散点集上成立。

(b) $\kappa=-1$ 的情况

对于这种情况，$X(t)=(1-t^2)^{1/2}$ 是 $U_j(t)$ 的权，我们再次假设用下列截项级数表示 $F(t)$ 具有足够的精确度：

(13.23) $$F(t)\approx\sum_{0}^{p} A_jU_j(t)$$

由关系式 (厄尔地利 1953)

(13.24) $$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[U_j(t)(1-t^2)^{1/2}/(t-x)]dt$$

$$=-T_{j+1}(x),\quad -1<x<1$$

以及 (13.15) 式. (13.16) 式和 (13.23) 式，得到

(13.25) $$S(x)\approx\sum_{j=0}^{p} A_j(1/\pi)$$

$$\times \int_{-1}^{1} [U_j(t)(1-t^2)^{1/2}/(t-x)]dt$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} A_j T_{j+1}(x)$$

对于$x = x_r$，利用（13.2）式和（13.23）式．则（13.25）式可表示为

(13.26)
$$S(x_r) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{t-x_r}(1-t^2)^{1/2}dt$$

$$\approx -\sum_{0}^{n} A_j T_{j+1}(x_r)$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t_k^2)A_j U_j(t_k)}{(n+1)(t_k-x_r)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t_k^2)F(t_k)}{(n+1)(t_k-x_r)}$$

其中

(13.27)
$$U_n(t_k) = 0, \quad t_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \cdots, n$$

$$T_{n+1}(x_r) = 0, \quad x_r = \cos\frac{\pi(2r-1)}{2(n+1)}, \quad r = 1, \cdots, n+1$$

假使我们再考虑到有关的高斯-切比雪夫积分公式（见斯特劳德和西克雷斯特，1966）

(13.28)
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{1/2}dt$$

$$\approx \sum_{1}^{n} \frac{(1-t_k^2)f(t_k)}{n+1}, \qquad U_n(t_k)=0$$

可以看出，(13.26)式形式上可以看成是奇异积分的高斯-切比雪夫积分公式，实际上它仅在点$x=x_r(r=1, \cdots, n+1)$，$T_{n+1}(x_r)=0$的离散点集上成立。

注记(i) 在公式(13.20)式和(13.26)式中仅有的误差是来自表示函数$F(t)$的截项级数(13.17)和(13.23)，这表明，假使F是有界的和连续的，只要把n取得充分大就能够得到任意高的精确度。

注记(ii) 虽然(13.17)式和(13.23)式中被指定的数p在(13.20)式和(13.26)式的最后表示式中并不出现，但在推导它们时我们假设$n>p$。

13.2 奇异积分方程的解

我们研究下列奇异积分方程：

(13.29) $$(1/\pi)\int_{-1}^{1}[\phi(t)/(t-x)]dt + \int_{-1}^{1}k(x,t)\phi(t)dt = g(x), \qquad -1<x<1$$

(a) $\kappa=1$的情况

对于这种情况，未知函数ϕ可以表示为

(13.30) $$\phi(t)=F(t)/(1-t^2)^{1/2}$$

其中有界函数F是个新的未知函数。将上式代入(13.29)式，我们得到

(13.31) $$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)dt}{(t-x)(1-t^2)^{1/2}}+\int_{-1}^{1}k(x,t)\frac{F(t)dt}{(1-t^2)^{1/2}}=g(x)$$

于是由（13.31）式得到的 $F(t)$ 必须满足条件（参见第6、7章）

(13.32) $$\int_{-1}^{1}[F(t)/(1-t^2)^{1/2}]dt=C$$

其中 C 是已知常数。注意，因为 $F(t)$ 和 $k(x,t)$ 是有界的，（13.31）式中的第二个积分和（13.32）式的积分能够用高斯-切比雪夫积分公式（13.22）算出。于是，由（13.20）式、（13.22）式、（13.31）式及（13.32）式，我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}F(t_k)\left[\frac{1}{t_k-x_r}+\pi k(x_r,t_k)\right]=g(x_r),\qquad r=1,\cdots,n-1$$

(13.33) $$\sum_{1}^{n}\frac{\pi}{n}F(t_k)=C$$

$$t_k=\cos\frac{\pi}{2n}(2k-1),\qquad x_r=\cos\frac{\pi r}{n},$$

$$k=1,\cdots,n,\qquad r=1,\cdots,n-1$$

上式给出了用来确定 $F(t_1)$，$F(t_2)$，…，$F(t_n)$ 的一组 n 个线性代数方程。

(b) $\kappa=-1$ 的情况

在这种情况下，ϕ 为下列形式

(13.34) $$\phi(t)=F(t)(1-t^2)^{1/2}$$

采用类似于情况(a)的方法，由(13.26)式、(13.28)式，(13.29)式及(13.34)式，我们得到

(13.35)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-t_k^2}{n+1}F(t_k)\left[\frac{1}{t_k-x_r}+\pi k(x_r,t_k)\right]=g(x_r)$$
$$t_k=\cos\frac{k\pi}{n+1},\qquad x_r=\cos\frac{\pi(2r-1)}{2(n+1)}$$

对于$r=1,\cdots,n+1$，上式都是成立的，这就是说，有$(n+1)$个可能的配置点用来确定n个未知数$F(t_1),\cdots,F(t_n)$。于是只要选取这些点中的n个点就足以确定$F(t_k)$。①利用(13.23)式、(13.24)式及(11.12)式，能够很容易地证明由(13.25)式给出的解满足用(11.5)式给出的有关相容性条件。

注意，对于一个积分方程给出的公式(13.33)式和(13.35)式可以直接推广到像(11.2)式那样的奇异积分方程组中去。

例 半平面上的弹性肋板

作为一个应用我们来研究第11章中给出的例子，这个问题已经被公式化为

(13.36)
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)}{t-x}\,dt-\lambda\int_{-1}^{x}\phi(t)dt=P_0,\qquad -1<x<1$$

并且满足

(13.37)
$$\int_{-1}^{1}\phi(t)dt=0$$

---

①原注 实际上，n可以选取为偶数，对应于$r=n/2+1$的点可以不去过问。

在这个问题里切应力$\phi(t)$在$t=\mp1$有可积奇异性，于是ϕ和应力奇异性的强度A可以表示为

(13.38) $\phi(t)=F(t)/(1-t^2)^{1/2}$, $A=F(1)$

函数F由（13.33）式得到，对于$P_0=1$，$n=20, 40, 60$，$\lambda=10/3$和$\lambda=1/3$分别对应的应力奇异性强度值列于表3。该

表3 **应力奇异性强度$F(1)$**

	n			
λ	20	40	60	$A(30)$
10/3	0.4061	0.4104	0 4115	0.4115
1/3	0.8323	0.8331	0.8340	0.8334

表也列出了第11章得到的A值（见表1）。表中给出的$F(1)$是由最后三点的$F(t_k)$采用二次外推法得到的。对于$\lambda=0$（即不能伸长的肋板）由（13.19）式可看出精确解是$F(t)=T_1(t)=t$及$A=1$。

关于数值计算结果的收敛性问题，人们猜测，如果令“$N\to\infty$”将得到“精确的”结果，那么，把计算出的结果适当地表示成$1/N$的函数，取$N\to\infty$，用这样的方法可估算出计算结果的极限值。例如，在所研究的例子中，可以假设对于“大”的N值，应力奇异性的强度$A(N)$可以表示为

(13.39) $A(N)=A(\infty)+(B/N^\alpha)$

这个$A(N)$也就是表1中给出的值。上式中$A(\infty)$、B和α是未知常数，$A(\infty)$是所要求的量。对于$N=N_i$, $i=1,2,3$，写出（13.39）式，由此可以确定出这些未知数。作为一个

例子，对于 $\lambda=10/3$ 由表1的 $A(N)$ 值按（13.39）式算出 $A(\infty)$、B、α 值，将它们列于表4中。该表指出了不同 N_i $(i=1, 2, 3)$ 的集合的 $A(\infty)$ 估计值。把这些值相互进行比较，并与表3中的值进行比较，在此就无需仔细地叙说了。应该指出，要得到很好的估计值 $A(\infty)$，对于给出的 $\alpha>1$，N_i 应该取得足够的大。同样地，如果 $A(N_i)$ 的值是波动的，则需要修改由（13.39）式给出的模型。

表4 $A(\infty)$，B，α 的值*

N_i	$A(\infty)$	B	α
6，8，10	0.41181	-0.25477	2.0544
8，12，16	0.41180	-0.24433	2.0358
10，11，12	0.41187	-0.21117	1.9588
10，20，30	0.41179	-0.23717	2.0246
28，29，30	0.41179	-0.22060	2.0018

*对于 $\lambda=10/3$ 按(13.39)式计算

13.3 用高斯-雅可比积分公式求解

第10章指出，具有广义柯西核的奇异积分方程的基本解为〔见（10.20）式〕

$$w(t)=(t-a)^{-\beta}(b-t)^{-\alpha} \tag{13.40}$$

注意，由(13.40)式给出的 $w(t)$ 是雅可比多项式 $P_n^{(-\alpha,-\beta)}(t)$ 的权函数，要解像（9.24）式（其中 $b=c$）及（10.2）式的

积分方程，可以应用类似于13.2节介绍的数值方法。在这种情况下，称为高斯－雅可比积分公式的基本公式为〔例如，见斯特劳德和西克雷斯特，1966；罗尔斯顿（Ralston），1965〕：

$$\int_{-1}^{1} f(\tau,\xi)(1-\tau)^{-\alpha}(1+\tau)^{-\beta}d\tau \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(\tau_k,\xi), \quad -1<(\alpha,\beta)<1 \tag{13.41}$$

其中 τ_k 是下列方程的根

$$P_n^{(-\alpha,-\beta)}(\tau_k)=0, \quad k=1,\cdots,n \tag{13.42}$$

加权常数由下式给出

$$A_k=-\frac{2n-\alpha-\beta+2}{(n+1)!(n-\alpha-\beta+1)} \times \frac{\Gamma(n-\alpha+1)\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha-\beta+1)} \times \frac{2^{-\alpha-\beta}}{P_n'^{(-\alpha,-\beta)}(\tau_k)P_{n+1}^{(-\alpha,-\beta)}(\tau_k)} \tag{13.43}$$

用一个例子来说明这种方法，我们研究 $b=c$ 的积分方程（9.24）。该方程具有（9.27）式表示的广义柯西核以及一个特征方程，这个特征方程能确定由（9.37）式给出的基本函数的指数 α、β。首先我们用下式将半区间 c 的因次标准化

$$\tau=t/c, \quad \xi=x/c, \quad p(t)=\phi(\tau) \tag{13.44}$$
$$f_j(x)=s_j(\xi), \quad j=1,2$$

于是积分方程（9.24）式变成

$$(13.45)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\tau)d\tau}{\tau-\xi}+\frac{\mu_1}{2\mu_2}\int_{-1}^{1}\phi(\tau)\begin{Bmatrix}\operatorname{ctg}(\pi/2)(\tau-\xi)\\ \csc(\pi/2)(\tau-\xi)\end{Bmatrix}d\tau$$

$$+\int_{-1}^{1}\phi(\tau)k(c\xi,c\tau)cd\tau=\begin{cases}-\mu_1 s_1(\xi)\\ -\mu_1 s_2(\xi)\end{cases}$$

$$-1<\xi<1$$

其中 $k(x,t)$ 由（9.25）式给出，方程要有解必须遵守（9.8）式或下式

$$(13.46)\qquad 2\pi a^2 c\int_{-1}^{1}\phi(\tau)d\tau=C$$

积分方程的基本函数是

$$(13.47)\qquad w(\tau)=(1-\tau^2)^{-\gamma},\qquad \cos\pi\gamma=\lambda=\mu_1/(\mu_1+\mu_2)$$

于是，用下式定义积分方程的解

$$(13.48)\qquad \phi(\tau)=G(\tau)(1-\tau^2)^{-\gamma},\qquad |\tau|<1$$

利用（13.41）式，则（13.45）式可表示为

$$(13.49)\qquad \sum_{j=1}^{n}A_jG(\tau_j)\Bigg[\frac{1}{\pi(\tau_j-\xi_r)}+\frac{\mu_1}{2\mu_2}\begin{Bmatrix}\operatorname{ctg}(\pi/2)(\tau_j-\xi_r)\\ \csc(\pi/2)(\tau_j-\xi_r)\end{Bmatrix}+ck(c\xi_r,c\tau_j)\Bigg]\approx\begin{cases}-\mu_1 s_1(\xi_r)\\ -\mu_1 s_2(\xi_r)\end{cases}$$

$$r=1,\cdots,n-1$$

其中 ξ_r 是下列方程的根①

---

①原注　关于求方程（13.50）和（13.42）的根的计算程序及关于（13.41）式中误差的估计见斯特劳德和西克雷斯特的著作（1966）。

(13.50) $$P_{n-1}^{(1-\gamma,1-\nu)}(\xi_r)=0, \qquad r=1,\cdots,n-1$$

由（13.46）式得到下列附加方程

(13.51) $$\sum_{1}^{n} A_k G(\tau_k)=C/2\pi a^2 c$$

方程（13.49）和（13.51）给出了未知数 $G(\tau_j)(j=1,\cdots,n)$ 的 n 个方程

在这个问题里，人们还能够把描述奇点邻域内应力的"应力强度因子" k' 定义为

(13.52) $$p(x)\approx k'/(2\rho)^{\gamma}$$

其中 $\rho=c-x$ 与 c 比较起来是很小的。于是，由(13.48)式、(13.44）式和（13.52）式我们得到

$$p(t)=c^{2\gamma}G(t/c)/(c^2-t^2)^{\gamma}$$

(13.53) $$k'=\lim_{t\to c}[2(c-t)]^{\gamma}p(t)=c^{\gamma}G(1)$$

图 10 和图 11 给出了在 $a=c=b$，$\mu_2/\mu_1=0.345$ 情况下的一些数值计算结果。这些结果利用下式定义的标准化了的应力表达出来

(13.54) $$p_0=C/2\pi^2a^2c$$

图10指出了圆轴在反对称负荷和非对称负荷下的接触切应力 $p(x)$的分布。图 11 指出了对称负荷和反对称负荷情况下的应力强度因子k'。

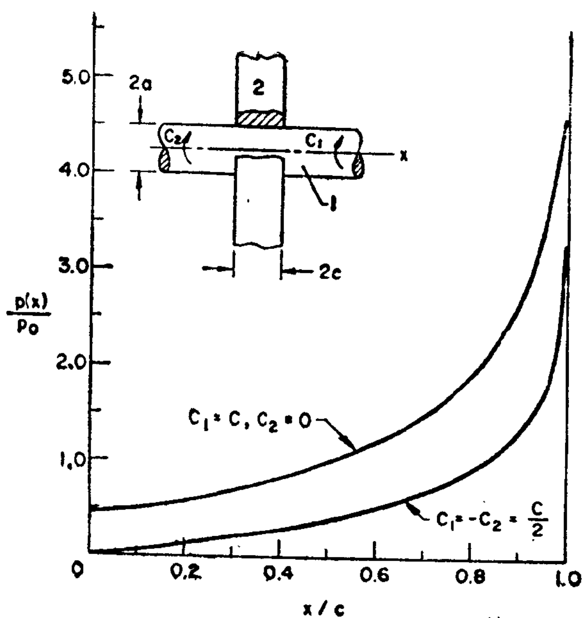


图10　在反对称负荷（$C_1 = -C_2$）和非对称负荷（$c_1 = c$，$c_2 = 0$）下圆轴的接触应力；$\mu_2/\mu_1 = 0.345$，$a = c$

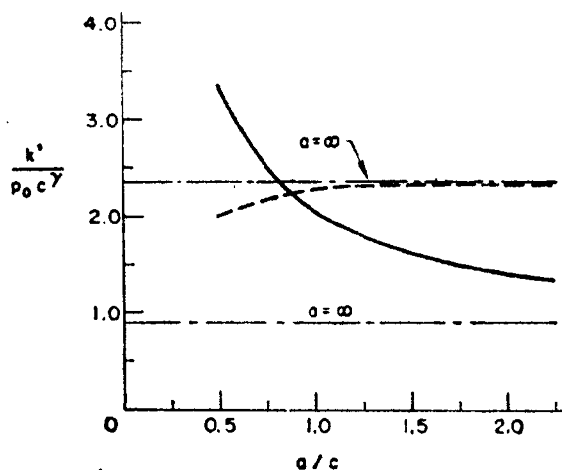


图11　应力强度因子作为轴半径的函数；$\mu_2/\mu_1=0.345$，$b=c$，实线为$p(x)=p(-x)$情况；虚线为$p(x)=-p(-x)$情况

参 考 文 献

Arin, K., and Erdogan, F. (1971). Penny-shaped crack in an elastic layer bonded to dissimilar half spaces, *Int. J. Eng. Sci.* **9**, 213–232.

Bierman, G. J. (1971). A particular class of singular integral equations, *SIAM J. Appl. Math.* **20**, 99–109.

Brown, E. J., and Erdogan, F. (1968). Thermal stresses in bonded materials containing cuts on the interface, *Int. J. Eng. Sci.* **6**, 517–529.

Bueckner, H. F. (1966). On a class of singular integral equations, *J. Math. Anal. Appl.* **14**, 392–426.

Cherepanov, G. P. (1962). The state of stress in an inhomogeneous plate with cuts, *Izv. Acad. Nauk. SSSR, OTN, Mekh. Mashino Stroenie* No. 1.

Churchill, R. V. (1948). "Introduction to Complex Variables and Applications." McGraw-Hill, New York.

Clements, D. L. (1971). A crack between dissimilar anisotropic media, *Int. J. Eng. Sci.* **9**, 257–265.

England, A. H. (1965). A crack between dissimilar media, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **32**, 400–402.

England, A. H. (1966). An arc crack around a circular elastic inclusion, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **33**, 637–640.

Erdelyi, A. (ed.) (1953). "Higher Transcendental Functions," Vol. 2. McGraw-Hill, New York.

Erdelyi, A. (ed.) (1954). "Tables of Integral Transforms," Vol. 2. McGraw-Hill, New York.

Erdogan, F. (1963). Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **30**, 232–236.

Erdogan, F. (1965a). Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **32**, 403–410.

Erdogan, F. (1965b). Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **32**, 829–836.

Erdogan, F. (1966). Elastic-plastic anti-plane problems for bonded dissimilar media containing cracks and cavities, *Int. J. Solids Struct.* **2**, 447–465.

Erdogan, F. (1968). Simultaneous dual integral equations with trigonometric and Bessel kernels, *ZAMM* **48**, 217–225.

Erdogan, F. (1969). Approximate solution of systems of singular integral equations, *SIAM J. Appl. Math.* **17**, 1041–1059.

Erdogan, F., and Gupta, G. D. (1971a). The stress analysis of multi-layered composites with a flaw, *Int. J. Solids Struct.* **7**, 39–61.

Erdogan, F., and Gupta, G. D. (1971b). Layered composites with an interface flaw, *Int. J. Solids Struct.* **7**, 1089–1107.

Erdogan, F., and Gupta, G. D. (1971c). The problem of an elastic stiffener bonded to a half plane, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **38**, 937–942.

Erdogan, F., and Gupta, G. D. (1972b). On the numerical solution of singular integral equations, *Quart. Appl. Math.* **29**, 525–534.

Erdogan, F., and Ozbek, T. (1969). Stresses in fiber-reinforced composites with imperfect bonding, *J. Appl. Mech. Trans. ASME* **35**, 865–869.

Erdogan, F., and Ratwani, M. (1970). Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack, *Int. J. Fracture Mech.* **6**, 379–392.

Erdogan, F., and Ratwani, M. (1972). A circumferential crack in a cylindrical shell under torsion, *Int. J. Fracture Mech.* **8**, 87–95.

Gakhov, F. D. (1966). "Boundary Value Problems." Pergamon, Oxford.

Galin, L. A. (1953). "Contact Problems in the Theory of Elasticity" (in Russian). Gostekizdat, Moscow.

Green, A. E., and Zerna, W. (1954). "Theoretical Elasticity." Oxford Univ. Press, London and New York.

Kantorovich, L. V., and Krylov, V. I. (1958). "Approximate Methods of Higher Analysis." Wiley (Interscience), New York.

Karpenko, L. N. (1966). Approximate solution of a singular integral equation by means of Jacobi polynomials, *J. Appl. Math. Mech. (PMM)* **30**, 668–675.

Muskhelishvili, N. I. (1953a). "Singular Integral Equations." Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

Muskhelishvili, N. I. (1953b). "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity." Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

Ozbek, T., and Erdogan, F. (1969). Some elasticity problems in fiber-reinforced composites with imperfect bonds, *Int. J. Eng. Sci.* **7**, 931–946.

Ralston, A. (1965). "A First Course in Numerical Analysis." McGraw-Hill, New York.

Sneddon, I. N. (1966). "Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory." North-Holland Publ., Amsterdam.

Stroud, A. H., and Secrest, D. (1966). "Gaussian Quadrature Formulas." Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Szegö, G. (1939). "Orthogonal Polynomials," Colloq. publ. Vol. 23. Amer. Math. Soc.

Vekua, N. P. (1967). "Systems of Singular Integral Equations." Noordhoff, Groningen, The Netherlands.

Woods, L. C. (1971). Analytic function theory, *In* "Continuum Physics" (A. C. Eringen, ed.), Vol. 1, Part V. Academic Press, New York.

[General Information]
□□=□□□□□□
□□=□□□F· □□□
□□=113
SS□=10236985
DX□=
□□□□=1982□07□□1□
□□□=□□□□□□□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 1 [illegible]

[illegible] 2 [illegible]

[illegible] 3 [illegible]

[illegible] 4 [illegible]

[illegible] 5 [illegible]

[illegible] 6 [illegible]

[illegible] 7 [illegible]

[illegible] 8 [illegible]

[illegible] 9 [illegible] - [illegible]

[illegible] 10 [illegible]

[illegible] 11 [illegible]

[illegible] 12 [illegible]

[illegible] 13 [illegible] - [illegible] - [illegible]

[illegible]